1. SEMNALE ȘI SISTEME

1. Probleme rezolvate

Problema 1

a. Arătați, că dacă $x[n]$ este un semnal discret impar, atunci $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 0$.

b. Dacă $x[n] = x_i[n] + x_p[n]$, unde $x_i[n]$ este un semnal impar, și $x_p[n]$ este un semnal par, determinați $x_i[n]$ și $x_p[n]$ în funcție de $x[n]$.

c. Arătați, că $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p^2[n]$.

Rezolvare Problema 1

a.

Pentru un semnal impar este valabilă relația: $x[-n] = -x[n]$

Pentru $n = 0$, avem: $x[0] = -x[0]$, $2x[0] = 0$, rezultă că $x[0] = 0$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n] + x[0] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n] \qquad (1)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n] \overset{n=-m}{=} \sum_{m=1}^{\infty} x[-m] = -\sum_{m=1}^{\infty} x[m] \qquad (2)$$

Din (1) + (2) rezultă, că

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = -\sum_{m=1}^{\infty} x[m] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n] = 0$$

b.

$x[n] = x_i[n] + x_p[n]$

$x[-n] = x_i[-n] + x_p[-n] = -x_i[n] + x_p[n]$

Avem, deci:

$$\begin{cases} x[n] = x_i[n] + x_p[n] \\ x[-n] = -x_i[n] + x_p[n] \end{cases}$$

Rezultă:

$$x_p[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2} \text{ și } x_i[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$$

c.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p^2[n]$$

Se știe, că: $x[n] = x_i[n] + x_p[n]$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x_i[n] + x_p[n]\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i^2[n] + 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i[n]\, x_p[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p^2[n]$$

Notăm: $y[n] = x_i[n] x_p[n]$. Trebuie demonstrat, că: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] = 0$.

$$y[-n] = x_i[-n] x_p[-n] = -x_i[n] x_p[n] = -y[n]$$

Rezultă, deci că $y[-n] = -y[n]$ este un semnal impar. Conform punctului a.) pentru un semnal impar este valabilă relația:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] = 0$$

În final:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p^2[n]$$

Problema 2

Pentru următoarele semnale:

1.) $x(t) = 4\cos(5\pi t)$

2.) $x(t) = \sigma(t) - 1/2$

3.) $x[n] = 4\cos(\pi n)$

4.) $x[n] = 2\sin(3n)$

a. Determinați analitic, care dintre ele sunt periodice (în caz afirmativ, determinați perioada semnalului)

b. Reprezentați-le grafic

Rezolvare Problema 2

1.

În cazul general, avem: $x_g(t) = A\cos(\omega_0 t)$. Iar $x(t) = 4\cos(5\pi t)$. Prin identificare, se obține:

$$A = 4,\ \omega_0 = 5\pi .$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 5\pi \Rightarrow T = \frac{2}{5}$. Rezultă, că este un semnal periodic, cu perioada: $T = \frac{2}{5}$. În figura P2.1 este reprezentat grafic semnalul $x(t) = 4\cos(5\pi t)$.

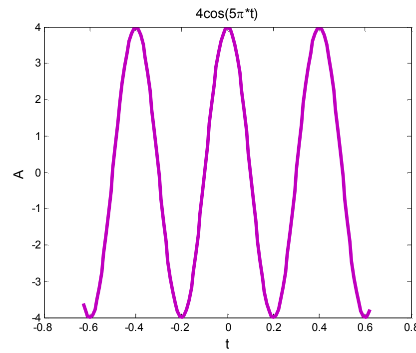


Figura P2.1

2. $x(t)=\sigma(t)-1/2$

$\sigma(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$. Semnalul nu este periodic.

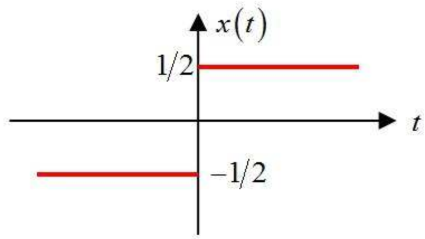


Figura P2.2

3.

În cazul general, avem: $x_g[n]=A\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$. Pentru semnalul $x[n]=4\cos(\pi n)$ (Semnalul este periodic, dacă $n=1$) Prin identificare rezultă A=4 și $N=2$. (Rezultă, că: $\frac{2\pi}{N}n=\Omega=\pi$) Deci semnalul considerat este periodic de perioadă 2.

n	0	1	2	3
$x[n]=4\cos(\pi n)$	4	-4	4	-4

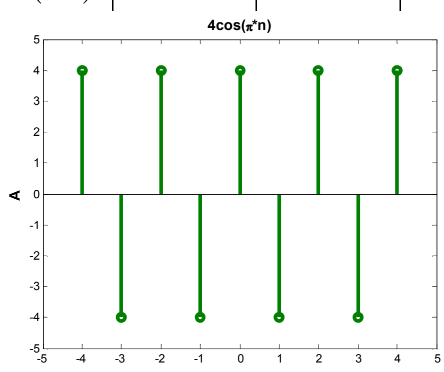


Figura P2.3

4.

$x[n]=2\sin(3n)$

$\Omega=3\neq\dfrac{2\pi}{N}$ pentru N întreg.

Semnalul $x[n]=2\sin(3n)$ nu este periodic.

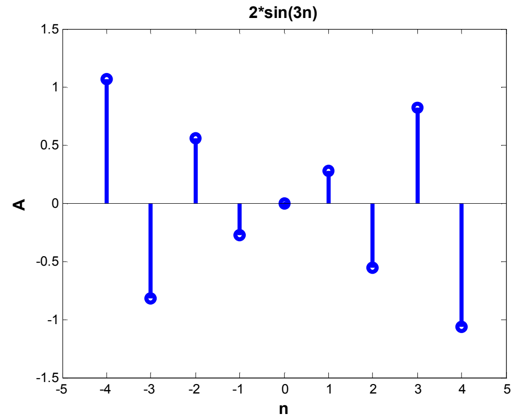


Figura P2.4

Problema 3

Fie un sistem, S, cu intrarea $x[n]$ și ieșirea $y[n]$, obținut prin conectarea în cascadă a două sisteme liniare și invariante în timp, S_1 și S_2. Relațiile de legătura intrare-ieșire pentru sistemele S_1 și S_2 sunt:

$$S_1:\; y_1[n]=2x_1[n]+4x_1[n-1]$$

$$S_2:\; y_2[n]=x_2[n-2]+\frac{1}{2}x_2[n-3]$$

unde $x_1[n]$ și $x_2[n]$ indică semnalul de intrare.

a. Găsiți relația de intrare-ieșire pentru sistemul S

b. Verificați relația intrare-ieșire a sistemului determinat la punctul a.) dacă se inversează ordinea sistemelor S_1 cu S_2.

Rezolvare Problema 3

a.

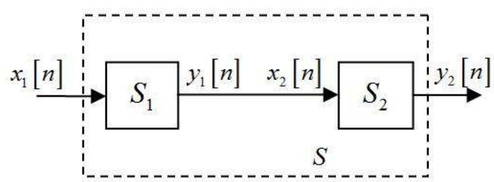


Figura P3.1

Se poate observa din figura P3.1, că intrarea sistemului S_2, notată cu $x_2[n]$ este egală cu ieșirea sistemului S_1, $y_1[n]$. Prin urmare:

$$\begin{aligned} y_2[n] &= x_2[n-2] + \frac{1}{2}x_2[n-3] = y_1[n-2] + \frac{1}{2}y_1[n-3] = \\ &= 2x_1[n-2] + 4x_1[n-3] + \frac{1}{2}\left(2x_1[n-3] + 4x_1[n-4]\right) \\ &= 2x_1[n-2] + 5x_1[n-3] + 2x_1[n-4] \end{aligned}$$

În final, pentru sistemul S, avem:

$$y[n] = 2x[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4]$$

b.

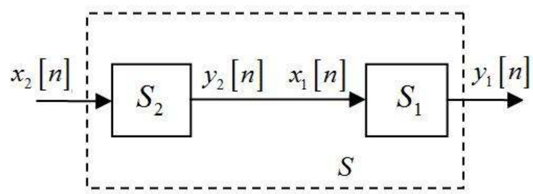


Figura P3.2

Pentru schema din figura P3.2 se poate scrie:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= 2x_1[n] + 4x_1[n-1] = 2y_2[n] + 4y_2[n-1] = \\ &= 2\left(x_2[n-2] + \frac{1}{2}x_2[n-3]\right) + 4\left(x_2[n-3] + \frac{1}{2}x_2[n-4]\right) \\ &= 2x_2[n-2] + 5x_2[n-3] + 2x_2[n-2] \end{aligned}$$

Rezultă în final:

$$y[n] = 2x[n-2] + 5x[n-3] + 2x[n-4]$$

Deci, nu se schimbă relația intrare-ieșire pentru sistemul S, dacă se inversează ordinea sistemelor S_1 cu S_2.

Problema 4

Se consideră sistemul în timp continuu, descris de ecuația diferențială:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2t\frac{dy(t)}{dt} + t^2y(t) = x(t)$$

având condiții inițiale nule.

a. Să se studieze liniaritatea sistemului
b. Să se studieze invarianța în timp a sistemului

Rezolvare Problema 4

a.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2t\frac{dy(t)}{dt}+t^2y(t)=x(t)$$

Liniaritate=aditivitate+omogenitate

i. aditivitate

Dacă la intrarea $x_1(t)$ sistemul răspunde cu $y_1(t)$ iar la intrarea $x_2(t)$ sistemul răspunde cu $y_2(t)$, atunci aplicarea sumei celor două semnale la intrare, $x_1(t)+x_2(t)$ va determina la ieșire $y_1(t)+y_2(t)$.

$$\boxed{\begin{aligned} &x_1(t): \ \to y_1(t)\\ &x_2(t): \ \to y_2(t)\\ &x_1(t)+x_2(t): \ \to y_1(t)+y_2(t)\end{aligned}}$$

$$\begin{cases} x_1(t)=\dfrac{d^2y_1(t)}{dt^2}+2t\dfrac{dy_1(t)}{dt}+t^2y_1(t)\\ x_2(t)=\dfrac{d^2y_2(t)}{dt^2}+2t\dfrac{dy_2(t)}{dt}+t^2y_2(t)\end{cases}$$

$$x_1(t)+x_2(t)=\frac{d^2\left(y_1(t)+y_2(t)\right)}{dt^2}+2t\frac{d\left(y_1(t)+y_2(t)\right)}{dt}+t^2\left(y_1(t)+y_2(t)\right)$$

Deci, sistemul este aditiv

ii. omogenitate

Aplicarea unui semnal la intrare amplificat cu factorul α va determina la ieșire un semnal amplificat cu același factor.

$$\boxed{\alpha x(t)\to\alpha y(t)}$$

$$\alpha\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\alpha t\frac{dy(t)}{dt}+\alpha t^2y(t)=\alpha x(t)$$

Deci sistemul este şi omogen. În consecinţă el este liniar.

b.

Invarianța în timp

$$S\{x(t)\}\to y(t)$$

$$S\{x(t-t_0)\}\overset{?}{\to}y(t-t_0)$$

La excitația $x(t-t_0)$, sistemul răspunde cu $y_{t0}(t)$ care reprezintă soluţia ecuaţiei diferenţiale:

$$x(t-t_0)=\frac{d^2y_{t0}(t)}{dt^2}+2t\frac{dy_{t0}(t)}{dt}+t^2y_{t0}(t)$$

iar $y(t-t_0)$ se obţine înlocuind în ecuaţia din enunţ variabila t cu variabila t-t_0.

$$x(t-t_0)=\frac{d^2y(t-t_0)}{dt^2}+2(t-t_0)\frac{dy(t-t_0)}{dt}+(t-t_0)^2y(t-t_0)$$

Întrucât membrii drepţi ai celor două relații intrare-ieșire nu sunt identice, sistemul considerat nu este invariant în timp.

Problema 5

Se consideră sistemul în timp continuu cu intrarea $x(t)$ și ieșirea $y(t)$ unde:

$$y(t)=x(\sin(t))$$

a. Este acest sistem cauzal ?
b. Dar liniar ?

Rezolvare Problema 5

a.
Sistemul nu este cauzal, deoarece ieșirea $y(t)$ poate precede intrarea. De exemplu: $y(-\pi)=x(0)$

b.
Se consideră intrările:

$$x_1(t):\ y_1(t)=x_1(\sin(t))$$
$$x_2(t):\ y_2(t)=x_2(\sin(t))$$

Fie

$$\begin{aligned}x(t)&=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\\ y(t)&=x(\sin(t))\\ &=a_1x_1(\sin(t))+a_2x_2(\sin(t))\\ &=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)\end{aligned}$$

Deci, sistemul în cauză este liniar.

Problema 6

Să se determine dacă următoarele sisteme sunt liniare și invariante în timp:

a. $y[n]=x^2[n-2]$

b. $y[n]=x[n+1]-x[n-1]$

Rezolvare Problema 6

a.
Fie
$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = x_1^2[n-2]$
$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = x_2^2[n-2]$

$x[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$

$$\begin{aligned} y[n] &= x^2[n-2] = \\ &= \left(a_1 x_1[n-2] + a_2 x_2[n-2]\right)^2 \\ &= a_1^2 x_1^2[n-2] + 2a_1 a_2 x_1[n-2] x_2[n-2] + a_2^2 x_2^2[n-2] \neq \\ &\neq a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] \end{aligned}$$

Sistemul nu este liniar

$S\{x[n-n_0]\} = x^2[n-2-n_0] = y[n-n_0]$
unde
$$y[n-n_0] = x^2[n-2-n_0]$$
Deci:
$$S\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$$
Sistemul este invariant in timp

b.
Fie
$x_1[n] \rightarrow y_1[n] = x_1[n+1] - x_1[n-1]$
$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = x_2[n+1] - x_2[n-1]$
$x[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$
$$\begin{aligned} y[n] &= x[n+1] - x[n-1] \\ &= a_1 x_1[n+1] - a_1 x_1[n-1] + a_2 x_2[n+1] - a_2 x_2[n-1] \\ &= a_1\left(x_1[n+1] - x_1[n-1]\right) + a_2\left(x_2[n+1] - x_2[n-1]\right) \\ &= a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] \end{aligned}$$
Sistemul este liniar

$S\{x[n-n_0]\} = x[n+1-n_0] - x[n-1-n_0] = y[n-n_0]$
$y[n-n_0] = x[n+1-n_0] - x[n-1-n_0]$
Sistemul este invariant in timp

1. Probleme propuse

Problema 1

a. Se consideră semnalul $x[n]=a^n\sigma[n]$, cu $0<a<1$. Notând cu $s_i[n]$ partea sa impară, calculaţi: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_i[n]=?$

b. Arătaţi că: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i^{\,2}[n]+\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p^{\,2}[n]$.

c. Reprezentați grafic părţile pară şi impară ale semnalului $x[n]=n^2\sigma[n]$.

Problema 2

Pentru semnalul din figura PP1.2, desenați:

a.) $x(t+3)$; **b.)** $x(t/2-2)$; **c.)** $x(1-2t)$; **d.)** $4x(t/4)$; **e.)** $x(t/2)\delta(t+1)$; **f.)** $x(2t-1)$;

g.) $x(t)\left[\sigma(t+1)-\sigma(t-1)\right]$; **h.)** $\left[0.5x(t)+x(-t)\right]\sigma(t)$.

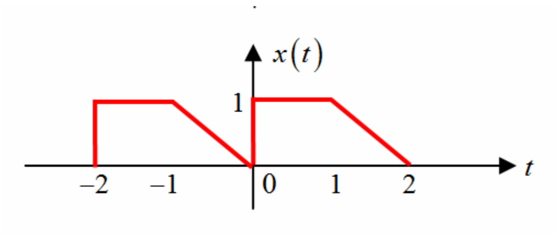


Figura PP1.2

Problema 3

Se consideră sistemul în timp discret, a cărui relație de intrare-ieșire este dată de ecuația:

$$y[n]=\sum_{k=n-2}^{n+2} x[k]$$

a. Să se studieze liniaritatea și invarianța în timp a sistemului.
b. Să se determine răspunsul la impuls al sistemului și să se reprezinte grafic acest răspuns.
c. Precizați, dacă sistemul este cauzal și justificați răspunsul.

Problema 4

Să se determine, dacă următoarele sisteme sunt:

1. liniare,
2. invariante în timp,
3. cauzale.

a. $S\{x[n]\}=g[n]\cdot x[n]$, cu $g[n]$ dat. **b.** $S\{x[n]\}=e^{x[n]}$ **c.** $S\{x[n]\}=3x[n]-2n$,

d. $S\{x[n]\}=\sum_{k=n_0}^{n} x[k]$, **e.** $S\{x[n]\}=x[n]+3\sigma[n+1]$,

2. CONVOLUȚIA SEMNALELOR

1. Probleme rezolvate

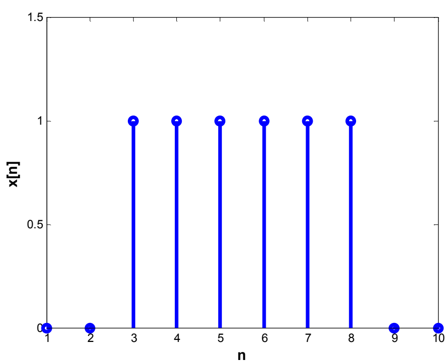
Problema 1

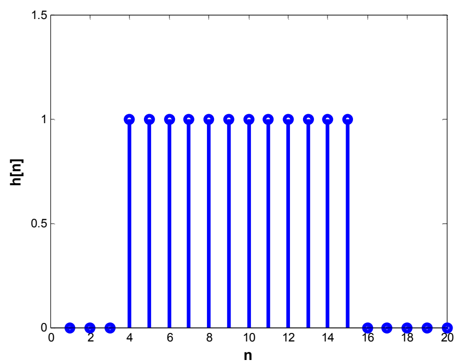
Calculați și reprezentați grafic $y[n] = x[n] * h[n]$, unde:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 3 \le n \le 8 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \quad \text{și} \quad h[n] = \begin{cases} 1, & 4 \le n \le 15 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

Rezolvare Problema 1

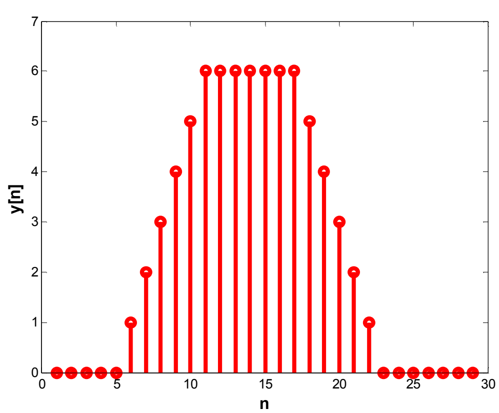
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$





$$y[n] = x[3]h[n-3] + x[4]h[n-4] + x[5]h[n-5] + x[6]h[n-6] + x[7]h[n-7] + x[8]h[n-8]$$

Rezultă, în final: $y[n] = \begin{cases} n-6, & 7 \le n \le 11 \\ 6, & 12 \le n \le 18 \\ 24-n, & 19 \le n \le 23 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$



Problema 2

Se consideră sistemul DLIT cu schema din figura 1:

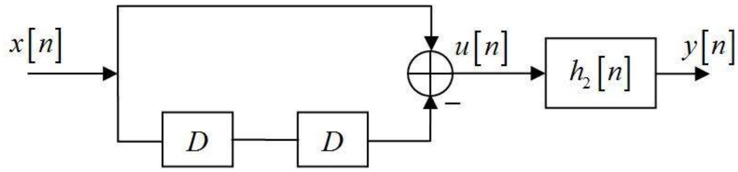


Figura P2.1

unde $h_2[n]=\sigma[n]$ și D reprezintă un bloc de întârziere.

a. Exprimați legătura dintre $y[n]$ și $u[n]$ și demonstrați că sistemul cu răspunsul la impuls, $h_2[n]$ este un sumator.

b. Determinați și schițați răspunsul sistemului din figura P2.1, la semnalele cu graficele din figura P2.2.

c. Determinați și reprezentați grafic răspunsul la impuls al sistemului din figura P2.1.

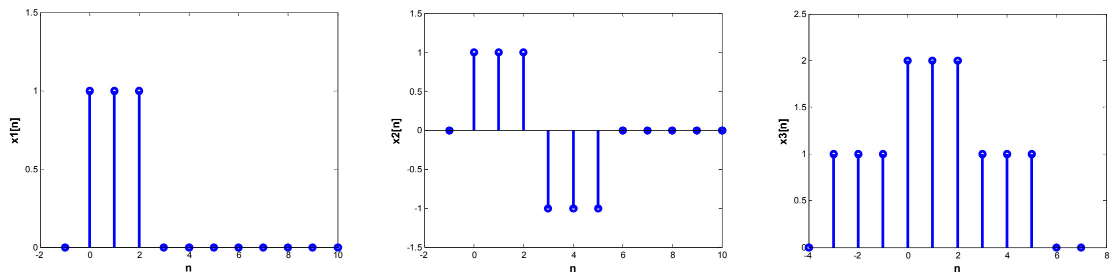


Figura P2.2

Rezolvare Problema 2

a.

$$y[n]=u[n]*h_2[n]=u[n]*\sigma[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u[k]\sigma[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}u[k]$$

Deoarece $y[n]$ se exprimă ca și suma eșantioanelor lui $u[k]$ anterioare momentului n, se poate afirma ca sistemul descris de $h_2[n]$ este un sumator.

b.

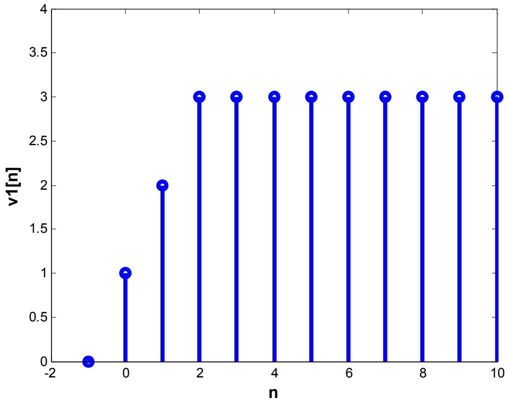
Semnalul $u_1[n]$ are expresia: $u_1[n]=x_1[n]-x_1[n-2]$

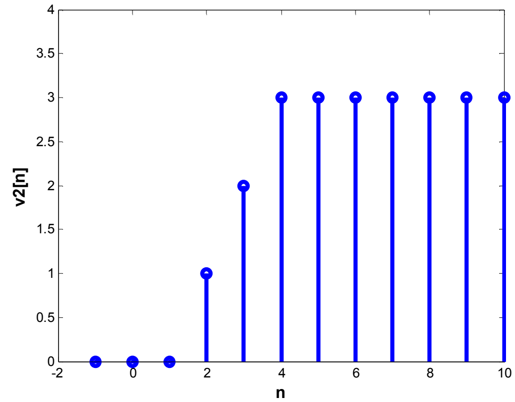
Rezultă, că:

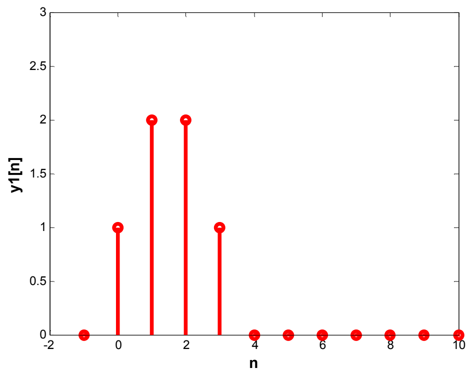
$$y_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_1[k]\sigma[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]\sigma[n-k]-\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k-2]\sigma[n-k]=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k]-\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k-2]=v_1[n]-v_2[n]$$

unde $v_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k]$ și $v_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k-2]$

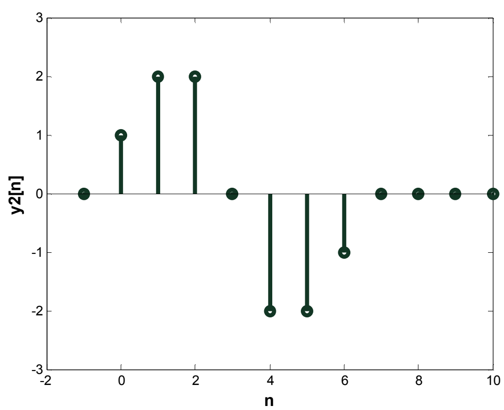






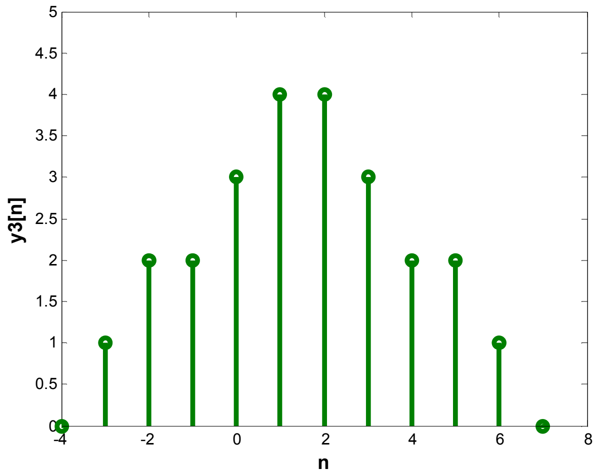
Semnalul $x_2[n]$ se poate pune sub forma: $x_2[n] = x_1[n] - x_1[n-3]$. Având în vedere, că sistemul considerat este liniar și invariant în timp, rezultă că:

$$y_2[n] = y_1[n] - y_1[n-3]$$



Pentru $x_3[n]$, avem: $x_3[n] = x_1[n+3] + 2x_1[n] + x_1[n-3]$. Utilizând proprietatea de liniaritate și invarianța în timp, avem:

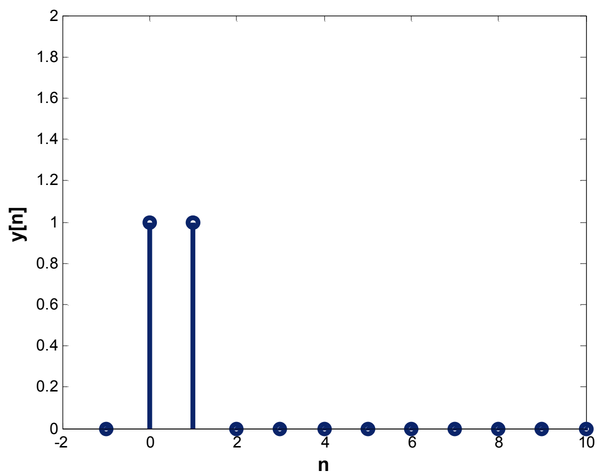
$$y_3[n] = y_1[n+3] + 2y_1[n] + y_1[n-3]$$



c.

$u[n]=\delta[n]-\delta[n-2]$

$y[n]=u[n]*\sigma[n]=(\delta[n]-\delta[n-2])*\sigma[n]=\sigma[n]-\sigma[n-2]=h[n]$



Problema 3

Se consideră SLIT discret din figura P3.1. Știind, că $h_2[n]=\sigma[n]-\sigma[n-2]$ și că răspunsul la impuls al sistemului are graficul din figura P3.2, determinați:

a. Expresia analitică a lui $h_1[n]$.

b. Răspunsul sistemului la semnalul: $x[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$

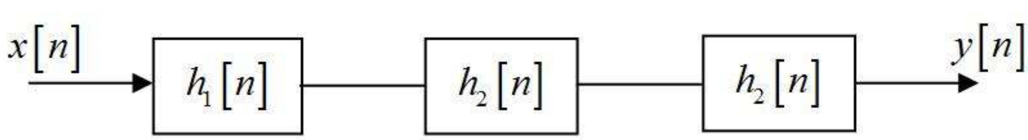


Figura P3.1

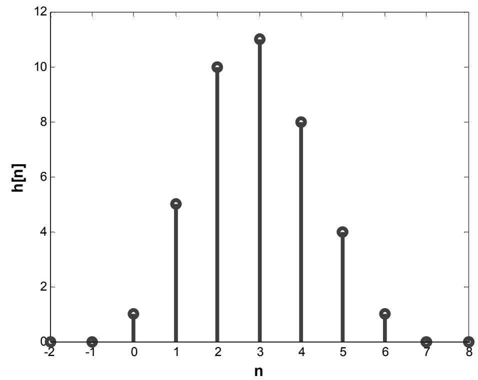


Figura P3.2

Rezolvare Problema 3

a.

$$h_2[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$$

$$h_2[n]*h_2[n]=(\delta[n]+\delta[n-1])*(\delta[n]+\delta[n-1])=\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2]$$

$$h[n]=h_1[n]*h_2[n]*h_2[n]=h_1[n]*(\delta[n]+2\delta[n-1]+\delta[n-2])=h_1[n]+2h_1[n-1]+h_1[n-2]$$

Pentru

$n=0$ $\quad 1=h_1[0]+2h_1[-1]+h_1[-2]\Rightarrow h_1[0]=1$

$n=1$ $\quad 5=h_1[1]+2h_1[0]+h_1[-1]\Rightarrow h_1[1]=3$

$n=2$ $\quad 10=h_1[2]+2h_1[1]+h_1[0]\Rightarrow h_1[2]=3$

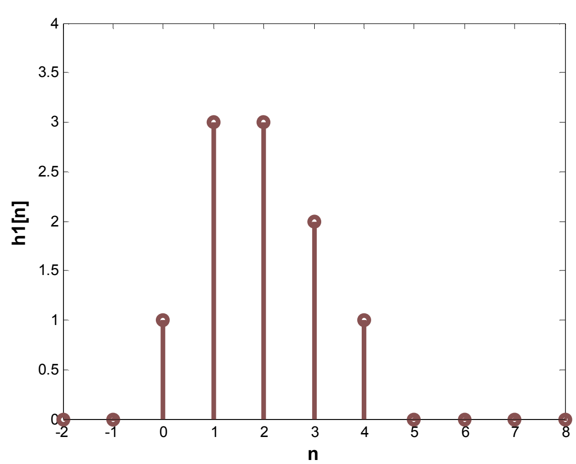
$n=3$ $\quad 11=h_1[3]+2h_1[2]+h_1[1]\Rightarrow h_1[3]=2$

$n=4$ $\quad 8=h_1[4]+2h_1[3]+h_1[2]\Rightarrow h_1[4]=1$

$n=5$ $\quad 4=h_1[5]+2h_1[4]+h_1[3]\Rightarrow h_1[5]=0$

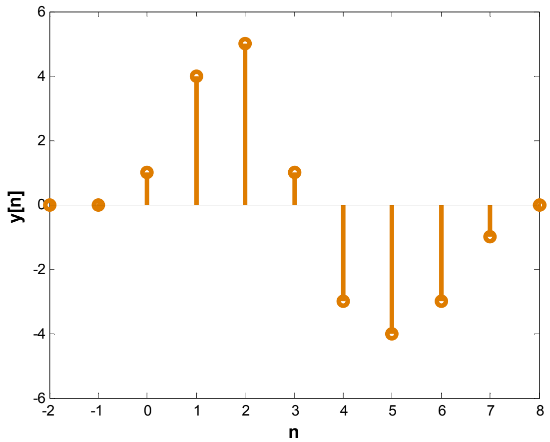
$n=6$ $\quad 1=h_1[6]+2h_1[5]+h_1[4]\Rightarrow h_1[6]=0$

$n=7$ $\quad 0=h_1[7]+2h_1[6]+h_1[5]\Rightarrow h_1[7]=0$



b.

$$y[n] = h[n] * x[n] = h[n] * \left(\delta[n] - \delta[n-1]\right) = h[n] - h[n-1]$$



Problema 4

Se consideră SLIT discret, cu răspunsul la impuls:

$$h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n \sigma[n]$$

a. Determinați constanta A astfel încât:

$$h[n] - Ah[n-1] = \delta[n]$$

b. Folosind rezultatul de la punctul a), determinați răspunsul la impuls $g[n]$, al sistemului invers, sistemului cu răspunsul la impuls $h[n]$.

Obs. Răspunsul la impuls $g[n]$ satisface condiția: $h[n] * g[n] = \delta[n]$

Rezolvare Problema 4

a.

$$h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n \sigma[n]$$

$$\begin{aligned} h[n] - Ah[n-1] &= \left(\frac{1}{5}\right)^n \sigma[n] - A\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \sigma[n-1] \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)^n \sigma[n] - A\left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \sigma[n-1] \qquad (1) \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)^n \left[\sigma[n] - 5A\sigma[n-1]\right] \end{aligned}$$

Este cunoscută relația:

$$\sigma[n] - \sigma[n-1] = \delta[n]$$

Pentru ca membrul drept al relației (1) să fie proporțional cu $\delta[n]$ este necesar ca $5A=1$. În acest caz relația (1) devine:

$$h[n]-Ah[n-1]=\left(\frac{1}{5}\right)^n\delta[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^0\delta[n]=\delta[n]$$

Deci relația propusă este satisfăcută, dacă $A=\frac{1}{5}$.

b.

$$h[n]*g[n]=\delta[n] \tag{2}$$

Dar

$$h[n]-\frac{1}{5}h[n-1]=\delta[n] \tag{3}$$

Membrul stâng al relației (3) se scrie:

$$\begin{aligned} h[n]-\frac{1}{5}h[n-1]&=h[n]-\frac{1}{5}\left(h[n]*\delta[n-1]\right) \\ &=h[n]*\delta[n]-h[n]*\left(\frac{1}{5}\delta[n-1]\right) \\ &=h[n]*\left(\delta[n]-\frac{1}{5}\delta[n-1]\right) \end{aligned} \tag{4}$$

De aceea relația (3) se mai scrie:

$$h[n]*\left(\delta[n]-\frac{1}{5}\delta[n-1]\right)=\delta[n] \tag{5}$$

Identificând membrii stîngi ai relațiilor (2) și (5) se obține:

$$g[n]=\delta[n]-\frac{1}{5}\delta[n-1]$$

Problema 5

Fie

$$x(t)=\sigma(t-3)-\sigma(t-5)$$

și

$$h(t)=e^{-3t}\sigma(t)$$

Calculați $y(t)=x(t)*h(t)$.

Rezolvare Problema 5

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}e^{-3\tau}\left[\sigma(t-\tau-3)-\sigma(t-\tau-5)\right]d\tau$$

În intervalul $(t-5)<\tau<(t-3)$ valoarea semnalului $\left[\sigma(t-\tau-3)-\sigma(t-\tau-5)\right]$ este diferită de zero. Se disting trei cazuri:

Cazul I: $t \le 3$,

$$y(t) = 0$$

Cazul II: $3 < t \le 5$

$$y(t) = \int_0^{t-3} e^{-3\tau} d\tau = \frac{1 - e^{-3(t-3)}}{3}$$

Cazul III: $t > 5$

$$y(t) = \int_{t-5}^{t-3} e^{-3\tau} d\tau = \frac{\left(1 - e^{-6}\right) e^{-3(t-5)}}{3}$$

Prin urmare, rezultatul convoluției poate fi exprimat sub forma:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t \le 3 \\ \dfrac{1 - e^{-3(t-3)}}{3}, & 3 < t < 5 \\ \dfrac{\left(1 - e^{-6}\right) e^{-3(t-5)}}{3}, & 5 < t \le \infty \end{cases}$$

Problema 6

a. Arătați că dacă intrarea unui sistem liniar și invariant în timp continuu este periodică, atunci și ieșirea acestuia este periodică și cele două semnale au aceeași perioadă.

b. Fie $x(t)$ un semnal periodic de perioadă T și $x_1(t)$ restricția sa la intervalul $[0, T)$. Fie $h(t)$ răspunsul la impuls al unui sistem liniar și invariant în timp continuu și $y(t)$ și $y_1(t)$ răspunsurile acestui sistem la semnalele $x(t)$ și $x_1(t)$. Demonstrați relațiile:

$$x(t) = x_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1(t - nT)$$

c. Dacă $h(t)$ are reprezentarea grafică din figura P6.1a, iar $x(t)$ reprezentarea grafică din figura P6.1b, determinați și reprezentați grafic semnalul $y(t)$.

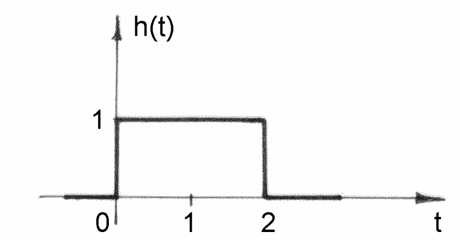


Figura P6.1a

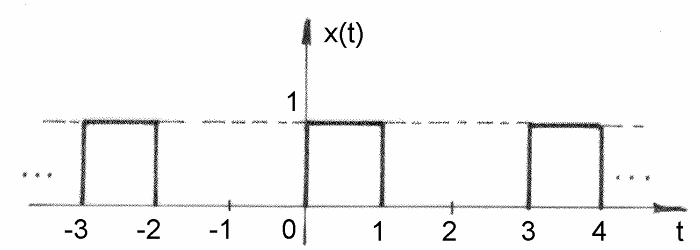


Figura P6.1b

Rezolvare Problema 6

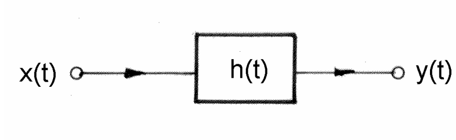


Figura P6.2

a).

$x(t) = x(t+T)$

$x(t-\tau+T) = x(u+T) = x(u) = x(t-\tau)$ unde $u = t-\tau$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\cdot h(\tau)\,d\tau$$

$$y(t+T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+T-\tau)\cdot h(\tau)\,d\tau = y(t)$$

În concluzie, semnalul $y(t)$ este periodic cu perioada T.

b).

$x_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$ reprezintă prelungirea prin periodicitate cu perioada T a semnalului $x_1(t)$, adică tocmai $x(t)$. Ca urmare, se scrie: $x(t) = x_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = x_1(t) * \delta_T(t) * h(t) = x_1(t) * h(t) * \delta_T(t) =$$

$$= y_1(t) * \delta_T(t) = y_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \sum_n y_1(t-nT)$$

c).

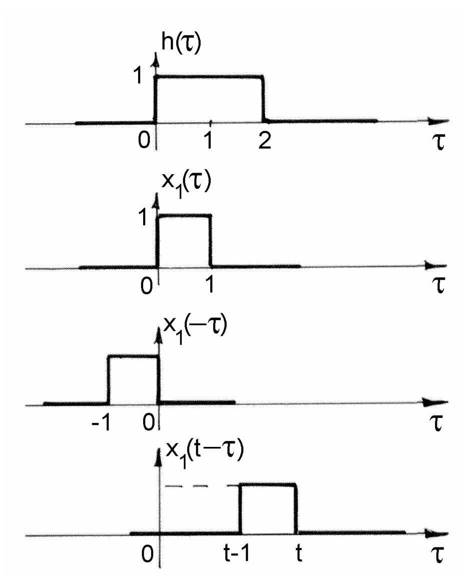


Figura P6.3

Cazul I. $t < 0$, $y_1(t) = 0$

Cazul II. $t-1 < 0$, $t \geq 0 \Leftrightarrow t \in [0,1)$ $\quad y_1(t) = \int_0^t d\tau = t$

Cazul III. $t-1 \geq 0$, $t < 2 \Leftrightarrow t \in [1,2)$ $\quad y_1(t) = \int_{t-1}^{t} d\tau = t$

Cazul IV. $t-1 \leq 2$, $t \geq 2 \Leftrightarrow t \in [2,3)$ $\quad y_1(t) = \int_{t-1}^{2} d\tau = 3-t$

Cazul V. $t > 3$ $\quad y_1(t) = 0$

Reprezentarea grafică a semnalului $y(t)$ este cea din figura P6.4 de mai jos:

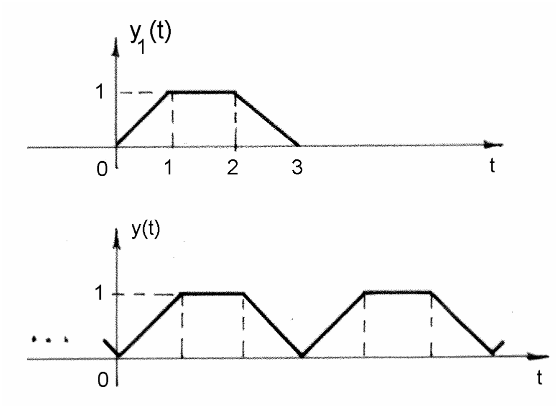


Figura P6.4

Problema 7

Se consideră sistemul cu răspunsul la impuls: $h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot \delta(t-nT)$.

a. Demonstrați că dacă la intrarea acestui sistem se aduce semnalul $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t-nT)$$

atunci la ieșirea sa se obține semnalul $y(t)$:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \cdot \delta(t-nT)$$

Care este legătura dintre secvențele: $x[n]$, $h[n]$ și $y[n]$?

b. În continuare se consideră că secvența $h[n]$ este de durată limitată: $h[n] = 0$ pentru $n < 0$ și $n \geq N$. Desenați o formă de implementare a sistemului considerat folosind amplificatoare, sumatoare și linii de întârziere, care realizează o întârziere cu T. Un astfel de sistem se numește filtru transversal.

c. Care este legătura dintre semnalele de la intrarea și ieșirea filtrului transversal de la punctul **b).** dacă toate valorile nenule ale secvenței $h[n]$ sunt egale cu $1/N$? Cum ați denumi un astfel de sistem?

d. Reprezentați grafic răspunsul sistemului de la punctul **c)** pentru $N=3$ la semnalul:

$$x(t)=\sigma(t)-\sigma(t-T)$$

Rezolvare Problema 7

a.

$$y(t)=x(t)*h(t)=\sum_n x[n]\cdot h(t-nT)=\sum_n x[n]\sum_m h[m]\cdot\delta\left(t-mT-nT\right)\overset{m+n=p}{=}$$

$$=\sum_n x[n]\sum_p h[p-n]\cdot\delta(t-pT)=\sum_p\left(\sum_n x[n]\cdot h[p-n]\right)\cdot\delta\left(t-pT\right)$$

Dacă se face notația: $y[p]=\sum_n x[n]\cdot h[p-n]$, rezultă:

$$y(t)=\sum_p y[p]\cdot\delta\left(t-pT\right)$$

Relația de legătură dintre secvențele $x[n]$, $h[n]$ și $y[n]$ este următoarea: $y[n]=x[n]*h[n]$

b.

$$h(t)=\sum_{n=0}^{N-1}h[n]\cdot\delta(t-nT)$$

Implementarea sistemului considerat folosind amplificatoare, sumatoare și linii de întârziere cu T este prezentată în figura P7.1:

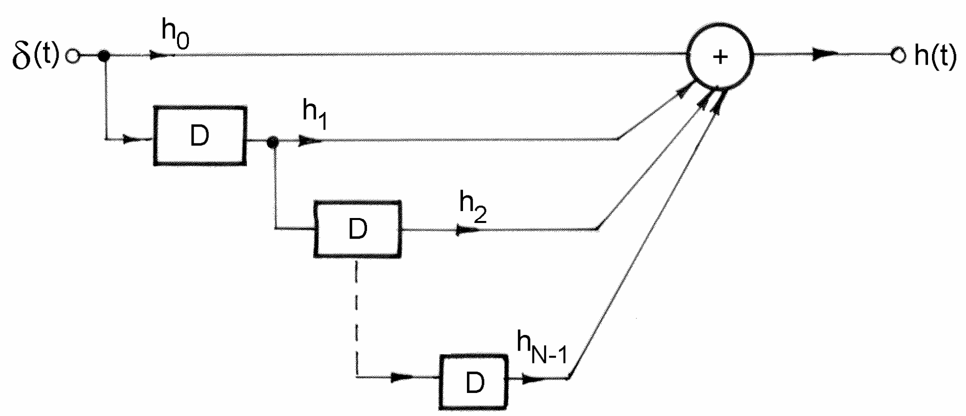


Figura P7.1

c.

Relația de legătură dintre semnalele de la ieșirea și intrarea filtrului transversal de la punctul **b)** este de forma:

$$y(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(t-nT)$$

Un astfel de sistem s-ar putea numi "mediator".

d.

$$x(t)=\sigma(t)-\sigma(t-T)$$

Răspunsul sistemului de la punctul **c)** pentru semnalul $x(t)$, definit cu relația de mai sus, și pentru $N=3$ este următorul: $y(t)=\frac{1}{3}[x(t)+x(t-T)+x(t-2T)]$

Reprezentarea grafică a lui $y(t)$ este cea din figura P7.2.

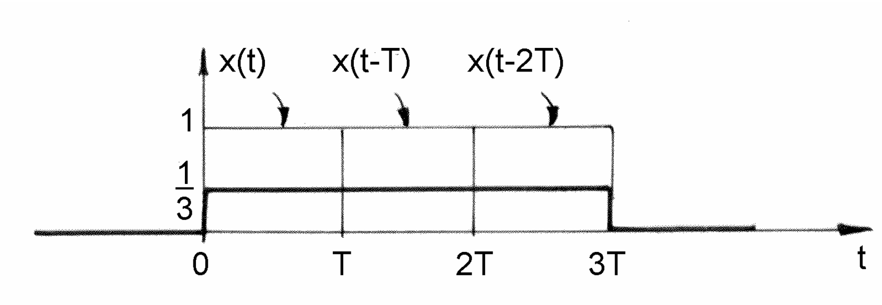


Figura P7.2

1. Probleme propuse

Problema 1

Fie sistemul discret, liniar și invariant în timp cu răspunsul la impuls:

$$h[n]=\sigma[n]-\sigma[n-N-1]$$

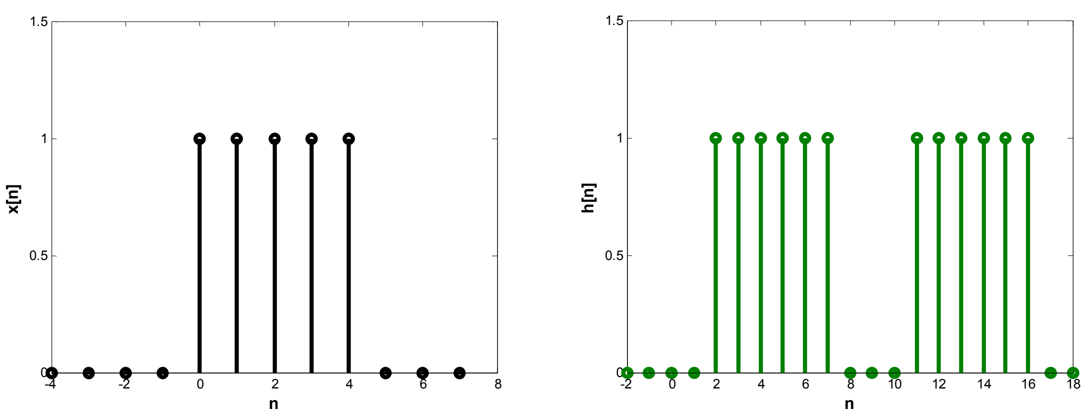
unde N este un număr întreg, $N<0$.

Răspunsul acestui sistem la semnalul de intrare $x[n]=\sigma[n]-\sigma[n-10]$ va fi $y[n]$.

Să se determine valoarea lui N astfel încât $y[4]=5$ și $y[14]=0$.

Problema 2

Calculați convoluția $y[n]=x[n]*h[n]$, unde $x[n]$ și $h[n]$ sunt reprezentate în figura P2.1



Problema 3

Se consideră un sistem în timp discret cu intrarea $x[n]$, şi cu răspunsul la impuls $h[n]$, dat de următoarele ecuaţii: $x[n]=\begin{cases}0, n<0\\ n, n\geq 0\end{cases}$, $h[n]=\begin{cases}1, n=0\\ -1, n=1\\ 0, \hat{\imath}n\ rest\end{cases}$.

Determinaţi şi reprezentaţi grafic răspunsul sistemului la semnalul $x[n]$.

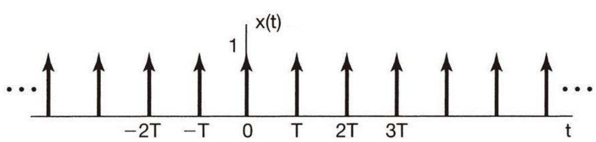
Problema 4

Să se determine și să se reprezinte grafic convoluția semnalelor $x(t)$ și $h(t)$, unde:

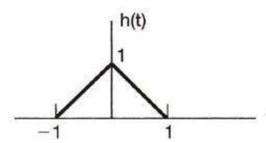
1.

$$x(t)=\begin{cases}t+1, & 0\leq t\leq 1\\ 2-t, & 1<t\leq 2\\ 0, & \text{in rest}\end{cases} \quad \text{și} \quad h(t)=\delta(t+2)+2\delta(t+1)$$

2.



și



3.

$$x(t)=\begin{cases}1, & 0\leq t\leq 1\\ 0, & \text{in rest}\end{cases} \quad \text{și} \quad h(t)=x(t/\alpha),\ \text{unde}\ 0<\alpha\leq 1$$

4.

$$x(t)=2\sigma(t-10) \quad \text{și} \quad h(t)=\sin(2t)\sigma(t)$$

5.

$$x(t)=\sigma(t)-\sigma(t-4) \quad \text{și} \quad h(t)=2e^{-t}\sigma(t)$$

6.

$$x(t)=\sigma(t)-\sigma(t-4) \quad \text{și} \quad h(t)=\delta(t-3)$$

Problema 5

Aria unui semnal $v(t)$ în timp continuu este definită ca:

$$A_v=\int_{-\infty}^{\infty} v(t)dt$$

Arătați, că dacă: $y(t)=x(t)*h(t)$, atunci

$$A_y=A_x\cdot A_h$$

3. SERII FOURIER

Problema 1

Se consideră semnalele periodice $x_1[n]$ și $x_2[n]$ în timp discret de perioada, $N=4$, având coeficienții seriei Fourier a_k respectiv b_k, $a_0=a_3=1$, $a_1=a_2=2$ și $b_0=1$, $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3=1$.

a. Să se determine expresiile $x_1[n]$ și $x_2[n]$.

b. Să se determine coeficienții seriei Fourier ai semnalului $g[n]=x_1[n]\cdot x_2[n]$.

Rezolvare Problema 1

a.

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1}c_k e^{jk\Omega_0 n}\text{ , unde }\Omega_0=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

$$x_1[n]=\sum_{k=0}^{3}a_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}=1+2e^{j\frac{\pi}{2}n}+2e^{j\pi n}+e^{j\frac{3\pi}{2}n}$$

$$x_2[n]=\sum_{k=0}^{3}b_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}=1+e^{j\frac{\pi}{2}n}+e^{j\pi n}+e^{j\frac{3\pi}{2}n}$$

b.

$$x_1[n]\cdot x_2[n]=\left(1+2e^{j\frac{\pi}{2}n}+2e^{j\pi n}+e^{j\frac{3\pi}{2}n}\right)\cdot\left(1+e^{j\frac{\pi}{2}n}+e^{j\pi n}+e^{j\frac{3\pi}{2}n}\right)=$$

$$=1+e^{j\frac{\pi}{2}n}+e^{j\pi n}+e^{j\frac{3\pi}{2}n}+2e^{j\frac{\pi}{2}n}+2e^{j\pi n}+2e^{j\frac{3\pi}{2}n}+2e^{j2\pi n}+$$

$$+2e^{j\pi n}+2e^{j\frac{3\pi}{2}n}+2e^{j2\pi n}+2e^{j\frac{5\pi}{2}n}+e^{j\frac{3\pi}{2}n}+e^{j2\pi n}+e^{j\frac{5\pi}{2}n}+e^{j3\pi n}$$

$$=6+6e^{j\frac{\pi}{2}n}+6e^{j\pi n}+6e^{j\frac{3\pi}{2}n}$$

Rezultă, în final: $c_0=c_1=c_2=c_3=6$

Problema 2

Fie semnalul periodic, $x[n]$, având perioada fundamentală, $N=5$. Coeficienții seriei Fourier atașate semnalului sunt:

$$c_0=1,\ c_2=c_{-2}^{*}=e^{j\pi/4},\ c_4=c_{-4}^{*}=2e^{j\pi/3}$$

Să se exprime semnalul $x[n]$ în forma:

$$x[n]=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\left(\Omega_k n+\varphi_k\right)$$

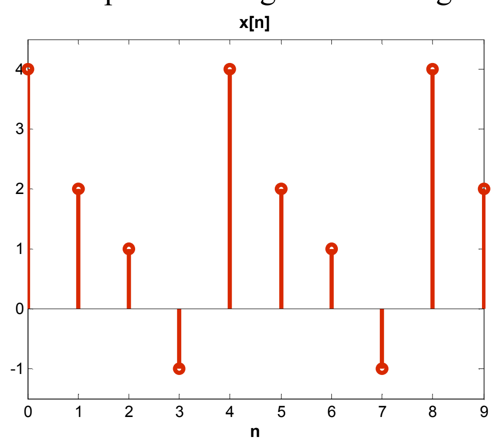
Rezolvare Problema 2

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} c_k e^{jk\Omega_k n} = \sum_{k=\langle N\rangle} c_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

$$\begin{aligned}
x[n] &= c_0 + c_2 e^{j2\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} + c_{-2} e^{-j2\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} + c_4 e^{j4\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} + c_{-4} e^{-j4\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \\
&= 1 + e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)} e^{j2\left(\frac{2\pi}{5}\right)n} + e^{-j\left(\frac{\pi}{4}\right)} e^{-j2\left(\frac{2\pi}{5}\right)n} + 2e^{j\left(\frac{\pi}{3}\right)} e^{j4\left(\frac{2\pi}{5}\right)n} + 2e^{-j\left(\frac{\pi}{3}\right)} e^{-j4\left(\frac{2\pi}{5}\right)n} \\
&= 1 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}n + \frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(\frac{8\pi}{5}n + \frac{\pi}{3}\right) \\
&= 1 + 2\sin\left(\frac{4\pi}{5}n + \frac{3\pi}{4}\right) + 4\sin\left(\frac{8\pi}{5}n + \frac{5\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

Problema 3

Se consideră semnalul periodic în timp discret cu graficul din figură:



a. Să se determine coeficienții seriei Fourier exponențiale atașate semnalului

b. Evaluați puterea semnalului pe baza eșantionelor $x[n]$ și apoi pe baza coeficienților c_k .

Rezolvare Problema 3

a.

Perioada semnalului, $N = 4$.

Coeficienții seriei Fourier exponențiale se calculează, prin:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Pentru $k = 0$.

$$c_0 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j0\frac{2\pi}{4}n} = \frac{1}{4}\left[x[0] + x[1] + x[2] + x[3]\right] = \frac{1}{4}[4+2+1-1] = \frac{3}{2}$$

Pentru $k=1$.

$$c_1=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-j1\frac{2\pi}{4}n}=\frac{1}{4}\left[4e^0+2e^{-j\frac{\pi}{2}}+e^{-j\pi}-e^{-j\frac{3\pi}{2}}\right]=\frac{1}{4}[4-2j-1-j]=\frac{1}{4}(3-3j)$$

Pentru $k=2$.

$$c_2=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-j2\frac{2\pi}{4}n}=\frac{1}{4}\left[4e^0+2e^{-j\pi}+e^{-j2\pi}-e^{-j3\pi}\right]=\frac{1}{4}[4-2+1+1]=1$$

Pentru $k=3$.

$$c_3=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-j3\frac{2\pi}{4}n}=\frac{1}{4}\left[4e^0+2e^{-j\frac{3\pi}{2}}+e^{-j3\pi}-e^{-j\frac{9\pi}{2}}\right]=\frac{1}{4}[4+2j-1+j]=\frac{1}{4}(3+3j)$$

b.

$$P_{x[n]}=\frac{1}{4}\sum\left|x[n]\right|^2=\frac{1}{4}(16+4+1+1)=5.5W$$

$$P_{c_k}=\frac{1}{4}\sum\left|c_k\right|^2=\frac{9}{4}+\frac{|3-3j|^2}{16}+1+\frac{|3+3j|^2}{16}=5.5W$$

Deci:

$$P_{x[n]}=P_{c_k}$$

Problema 4

Se consideră semnalul $x[n]$ dat de expresia:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k].$$

Acest semnal se aplică la intrarea unui SLIT, având răspunsul în frecvență, $H\left(e^{j\Omega}\right)$. Ieșirea sistemului este: $y[n]=\cos\left(\frac{5\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)$. Determinați valorile funcției de transfer, $H\left(e^{jk\pi/2}\right)$ pentru $k=\overline{0,3}$.

Rezolvare Problema 4

Semnalul $x[n]$ este periodic, având perioada $N=4$. Coeficienții seriei Fourier sunt:

$$c_k=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{4}n}=\frac{1}{4}$$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{3}c_kH\left(e^{j(2\pi/4)k}\right)e^{j(2\pi/4)kn}$$
$$=\frac{1}{4}H\left(e^{j0}\right)e^{j0n}+\frac{1}{4}H\left(e^{j(\pi/2)}\right)e^{j(\pi/2)n}+\frac{1}{4}H\left(e^{j(3\pi/2)}\right)e^{j(3\pi/2)n}+\frac{1}{4}H\left(e^{j(\pi)}\right)e^{j(\pi)n}$$

$$y[n]=\cos\left(\frac{5\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}e^{j\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{1}{2}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}e^{j\left(\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{1}{2}e^{j\left(\frac{3\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Prin identificare, avem:

$$H\left(e^{j0}\right)=H\left(e^{j\pi}\right)=0$$
$$H\left(e^{j(\pi/2)}\right)=2e^{j(\pi/4)}$$
$$H\left(e^{j(3\pi/2)}\right)=2e^{-j(\pi/4)}$$

Problema 5

Se consideră semnalul periodic, $x(t)$, de perioadă $T=2$, cu restricţia la perioada principală:

$$x_r(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1\\ -2 & 1<t<2\end{cases}$$

Derivata semnalului $x_r(t)$ poate fi pusă sub formă: $\frac{dx_r(t)}{dt}=A_1\delta_2(t-t_1)+A_2\delta_2(t-t_2)$

a) Reprezentaţi grafic semnalele: $x_r(t)$, $x(t)$ şi $\frac{dx_r(t)}{dt}$.

b) Determinaţi valorile: A_1, A_2, t_1 şi t_2.

Rezolvare Problema 5

Semnalul $x(t)$ are reprezentarea grafică din figura P5.1:

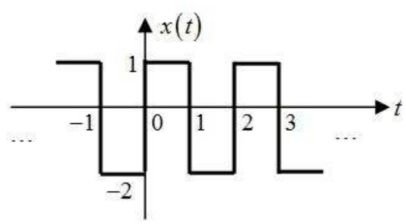


Figura P5.1

Semnalul $x_r(t)$ are reprezentarea grafică din figura P5.2:

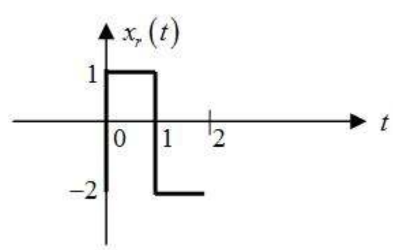


Figura P5.2

Derivata semnalului $x_r(t)$ are reprezentarea grafică din figura P5.3.

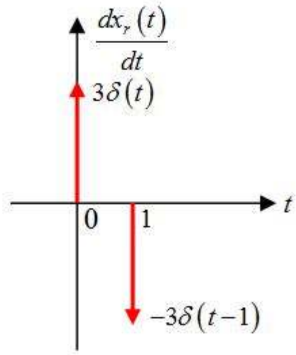


Figura P5.3

$$\frac{dx_r(t)}{dt} = A_1\delta(t-t_1) + A_2\delta(t-t_2)$$

Prin identificare, avem: $A_1 = 3$, $A_2 = -3$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$

Problema 6

Se consideră semnalul periodic, $x(t)$ în timp continuu:

$$x(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right)$$

Să se determine frecvența fundamentală, ω_0, respectiv coeficienții seriei Fourier, c_k.

Rezolvare Problema 6

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}.$$

Utilizând relațiile lui Euler, avem:

$$x(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{3}t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{3}t} + \frac{4}{2j}e^{j\frac{5\pi}{3}t} - \frac{4}{2j}e^{-j\frac{5\pi}{3}t} = 2 + \frac{1}{2}e^{j2\left(\frac{2\pi}{6}\right)t} + \frac{1}{2}e^{-j2\left(\frac{2\pi}{6}\right)t} + \frac{2}{j}e^{j5\left(\frac{2\pi}{6}\right)t} - \frac{2}{j}e^{-j5\left(\frac{2\pi}{6}\right)t}$$

Prin identificare, frecvența fundamentală a semnalului $x(t)$ este: $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Coeficienții seriei Fourier atașate semnalului $x(t)$, sunt: $c_0 = 2$, $c_2 = c_{-2} = \frac{1}{2}$, $c_5 = c_{-5}^* = -2j$

Problema 7

Fie semnalul periodic, $x(t)$, având perioada fundamentală, $T = 8$. Coeficienții seriei Fourier atașate semnalului sunt:

$$c_1 = c_{-1} = 2,\ c_3 = c_{-3}^* = 4j$$

Să se exprime semnalul $x(t)$ în forma:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$$

Rezolvare Problema 7

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

$$x(t)=a_1 e^{j\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}+a_{-1}e^{-j\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}+a_3 e^{j3\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}+a_{-3}e^{-j3\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

$$=2e^{j\left(\frac{2\pi}{8}\right)t}+2e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)t}+4je^{j3\left(\frac{2\pi}{8}\right)t}-4je^{-j3\left(\frac{2\pi}{8}\right)t}$$

$$=4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)-8\sin\left(\frac{6\pi}{8}t\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+8\cos\left(\frac{3\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Problema 8

a. Exprimați legătura dintre coeficienții dezvoltării în serie Fourier ai semnalelor periodice de la intrarea și ieșirea unui sistem liniar și invariant în timp continuu.

b. În figura P8.1 sunt prezentate caracteristicile de frecvență ale unui filtru. Determinați răspunsul acestuia pentru semnalul de mai jos: $x(t)=\cos(4\pi\cdot t+\phi)$;

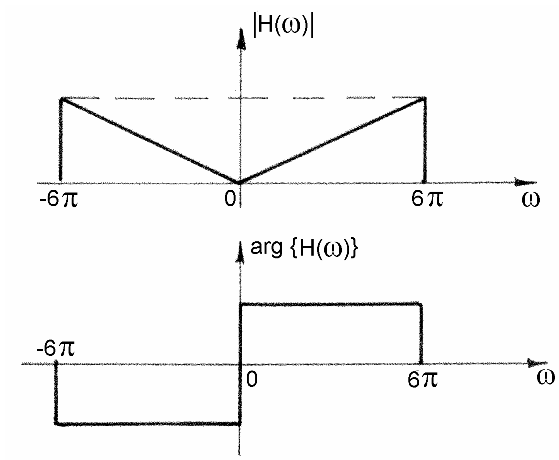


Figura P8.1

Rezolvare Problema 8

a.

$$x(t)=\sum_k c_{k_x}\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_k c_{k_x}\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}(t-\tau)}\cdot h(\tau)\cdot d\tau=\sum_k c_{k_x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}\tau}d\tau\right)\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}=\sum_k c_{k_x}\cdot H\left(k\frac{2\pi}{T}\right)\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

Se observă că:

$$c_{k_y}=c_{k_x}\cdot H\left(k\frac{2\pi}{T}\right)$$

b.

$$x(t)=\frac{1}{2}\left[e^{j(4\pi\cdot t+\phi)}+e^{-j(4\pi\cdot t+\phi)}\right]=\frac{1}{2}e^{j\phi}\cdot e^{j4\pi\cdot t}+\frac{1}{2}e^{-j\phi}\cdot e^{-j4\pi\cdot t}$$

$$c_{1_x}=\frac{1}{2}e^{j\phi};\qquad c_{-1_x}=\frac{1}{2}e^{-j\phi};$$

$$|H(4\pi)|=\frac{2}{3},\qquad \arg\{H(4\pi)\}=\frac{\pi}{2};\ |H(-4\pi)|=\frac{2}{3},\qquad \arg\{H(-4\pi)\}=-\frac{\pi}{2};$$

$$c_{1_y}=\frac{2}{3}e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}e^{j\phi}=\frac{1}{3}e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)};$$

$$c_{1_y}=\frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}e^{-j\phi}=\frac{1}{3}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)};$$

$$y(t)=\frac{1}{3}e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)}\cdot e^{j4\pi\cdot t}+\frac{1}{3}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right)}\cdot e^{-j4\pi\cdot t}$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}}=j;\qquad e^{-j\frac{\pi}{2}}=-j;$$

$$y(t)=\frac{1}{3}j\cdot e^{j\phi}\cdot e^{j4\pi\cdot t}-\frac{1}{3}j\cdot e^{-j\phi}\cdot e^{-j4\pi\cdot t}=\frac{1}{3}j\left[2j\cdot\sin(4\pi\cdot t+\phi)\right]=-\frac{2}{3}\sin(4\pi\cdot t+\phi)$$

$$y(t)=-\frac{2}{3}\sin(4\pi\cdot t+\phi)$$

Problema 9

Fie $x_1(t)$ un semnal periodic în timp continuu cu frecvența fundamentală, ω_1, având coeficienții seriei Fourier a_k. Pentru semnalul,

$$x_2(t)=x_1(1-t)+x_1(t-1)$$

care este frecvența fundamentală, ω_2 a semnalului $x_2(t)$ în legătura cu ω_1? Găsiți relația de legătura dintre coeficienții seriei Fouriei, b_k, ai semnalului $x_2(t)$ și coeficienții a_k.

Rezolvare Problema 9

Semnalele $x_1(1-t)$ și $x_1(t-1)$ au perioada fundamentală, $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$. Deoarece $y(t)$ este o combinație liniară a semnalelor $x_1(1-t)$ și $x_1(t-1)$, este periodic cu perioada fundamentală $T_2=\frac{2\pi}{\omega_1}$. Prin urmare, $\omega_2=\omega_1$. Folosind tabelele, rezultă:

$$x_1(t-1)\leftrightarrow a_k e^{-jk(2\pi/T_1)}$$
$$x_1(1-t)\leftrightarrow a_{-k}e^{-jk(2\pi/T_1)}$$

În final, avem:

$$x_1(1-t)+x_1(t-1)\leftrightarrow a_k e^{-jk(2\pi/T_1)}+a_{-k}e^{-jk(2\pi/T_1)}=e^{-jk\omega_1}(a_k+a_{-k}).$$

1. Probleme propuse

Problema 1

Fie $x[n]=\begin{cases}\mathbf{1}; 0\le n\le 7\\ \mathbf{0}; 8\le n\le 9\end{cases}$ un semnal periodic, cu perioada fundamentala $N=10$ şi coeficienţii dezvoltării în serie Fourier a_k. Se consideră semnalul $g[n]=x[n]-x[n-1]$.

a. Arătaţi că $g[n]$ are perioada fundamentală egală cu 10 şi reprezentaţi-l grafic.

b. Determinaţi coeficienţii dezvoltării lui $g[n]$ în serie Fourier.

c. Folosind coeficienţii dezvoltării lui $g[n]$ în serie Fourier şi proprietăţile coeficienţilor seriei Fourier, determinaţi a_k pentru $k\ne 0$.

Problema 2

Fie semnalul $x(t)$, în timp continuu, având pulsația fundamentală, $\omega_0=\pi$:

$$x(t)=\begin{cases}1.5, & 0\le t<1\\ -1.5, & 1\le t<2\end{cases}$$

Să se determine coeficienții dezoltării seriei Fourier ai semnalului.

Problema 3

Se consideră semnalul $x(t)=2\delta(t)-\delta(t-2)$.

a. Reprezentaţi-l grafic.

b. Prelungiţi-l prin periodicitate cu perioada $T=4$, obţinând semnalul $x_p(t)$. Determinaţi reprezentarea în serie Fourier exponenţială a semnalului $x_p(t)$.

c. Determinaţi răspunsul sistemului cu răspunsul în frecvenţă
$H(\omega)=\sigma\left(\omega+\frac{3\pi}{4}\right)-\sigma\left(\omega-\frac{3\pi}{4}\right)$ la semnalul $x_p(t)$.

Problema 4

În figura P4.1 este schiţat răspunsul în frecvenţă (modulul şi argumentul), $H(\omega)$ ale unui filtru.

a. Determinaţi expresia semnalului de la ieşirea filtrului dacă la intrarea sa se aduc semnalele:

$$\textbf{(1)}\ x_1(t)=3\cos(2\pi t+\theta) \qquad \textbf{(2)}\ x_2(t)=\sqrt{2}\cos(4\pi t+\theta)$$

b. Calculaţi puterile la intrarea şi ieşirea filtrului pentru semnalul $x_1(t)$.

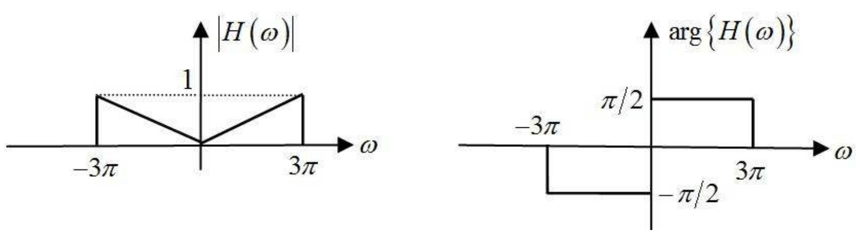


Figura P4.1

4. TRANSFORMATA FOURIER

1. Probleme rezolvate

Problema 1

Fie SLIT, caracterizat de ecuația cu diferențe finite:

$$6y[n]-5y[n-1]+y[n-2]=6x[n]+x[n-1]$$

a. Să se determine răspunsul în frecvență al sistemului, $H(\Omega)$.

b. Să se afle răspunsul la impuls al sistemului, $h[n]$.

c. Dați o posibilă implementare a sistemului, utilizând sumatoare, amplificatoare și circuite de întârziere.

Rezolvare Problema 1

a.

$$6y[n]-5y[n-1]+y[n-2]=6x[n]+x[n-1]$$

Aplicăm transformata Fourier asupra ecuației cu diferențe finite, rezultă:

$$6Y(\Omega)-5e^{-j\Omega}Y(\Omega)+e^{-j2\Omega}Y(\Omega)=6X(\Omega)+e^{-j\Omega}X(\Omega)$$

$$Y(\Omega)\left(6-5e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}\right)=X(\Omega)\left(6+e^{-j\Omega}\right)$$

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{6+e^{-j\Omega}}{6-5e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}}=\frac{6+e^{-j\Omega}}{\left(3-e^{-j\Omega}\right)\left(2-e^{-j\Omega}\right)}$$

b.

$$H(\Omega)=\frac{6+e^{-j\Omega}}{\left(3-e^{-j\Omega}\right)\left(2-e^{-j\Omega}\right)}=\frac{A}{3-e^{-j\Omega}}+\frac{B}{2-e^{-j\Omega}}=\frac{2A-Ae^{-j\Omega}+3B-Be^{-j\Omega}}{\left(3-e^{-j\Omega}\right)\left(2-e^{-j\Omega}\right)}$$

$$\begin{cases}2A+3B=6\\ -A-B=1\end{cases}$$

Rezultă din sistemul de mai sus: $B=8$ și $A=-9$.

$$H(\Omega)=\frac{-9}{3-e^{-j\Omega}}+\frac{8}{2-e^{-j\Omega}}$$

$$H(\Omega)=\frac{-9}{3\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}\right)}+\frac{8}{2\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)}=\frac{-3}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}+\frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

Utilizând tabelele, rezultă în final: $h[n]=-3\cdot\frac{1}{3^n}\sigma[n]+4\cdot\frac{1}{2^n}\sigma[n]$

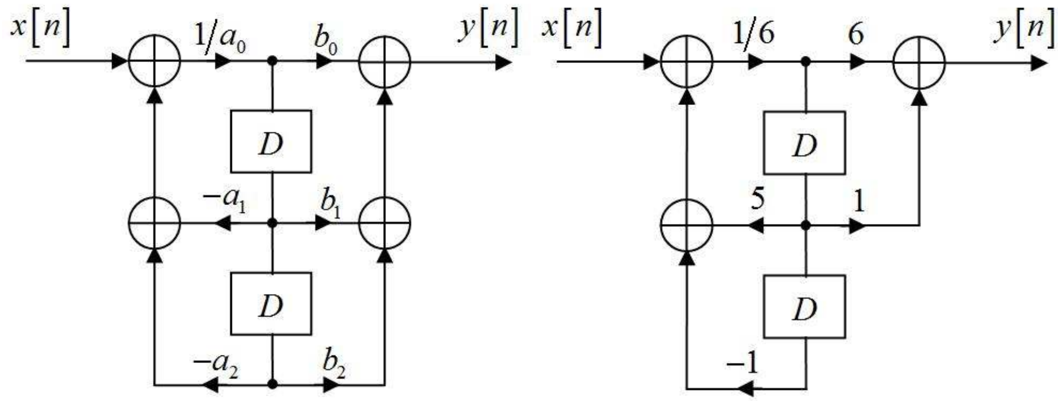
c.

$a_0 y[n]+a_1 y[n-1]+a_2 y[n-2]+\cdots=b_0 x[n]+b_1 x[n-1]+b_2 x[n-2]+\cdots$

$6y[n]-5y[n-1]+y[n-2]=6x[n]+x[n-1]$

Prin identificare, avem:

$a_0=6,\ a_1=-5,\ a_2=1,\ b_0=6,\ b_1=1,\ b_2=0.$



Problema 2

Un sistem discret are spectrele semnalelor de intrare și ieșire legate prin ecuația:

$$Y(\Omega)=2X(\Omega)+e^{-j\Omega}X(\Omega)-j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

a. Este sistemul în cauză liniar?

b. Dar invariant în timp?

c. Care este expresia răspunsului sistemului considerat la semnalul $\delta[n]$?

Rezolvare Problema 2

Folosind tabelele, avem:

$$Y(\Omega)\leftrightarrow y[n],\ X(\Omega)\leftrightarrow x[n],\ e^{-j\Omega}X(\Omega)\leftrightarrow x[n-1],\ j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}\leftrightarrow nx[n]$$

Aplicând TFD inversă asupra ecuației, se obține:

$$y[n]=2x[n]+x[n-1]-nx[n]$$

a.

Dacă: $x[n]=a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$, atunci avem: $y[n]=a_1y_1[n]+a_2y_2[n]$

$$\begin{cases} y_1[n]=2x_1[n]+x_1[n-1]-nx_1[n] \\ y_2[n]=2x_2[n]+x_2[n-1]-nx_2[n] \end{cases}$$

$$y[n]=2a_1x_1[n]+a_1x_1[n-1]-na_1x_1[n]+2a_2x_2[n]+a_2x_2[n-1]-na_2x_2[n]$$
$$=a_1\{2x_1[n]+x_1[n-1]-nx_1[n]\}+a_2\{2x_2[n]+x_2[n-1]-nx_2[n]\}$$
$$=a_1y_1[n]+a_2y_2[n]$$

Sistemul considerat este liniar.

b.

Dacă $S_d\{x[n]\}=y[n]$ atunci $S_d\{x[n-n_0]\}=y[n-n_0]$, $n_0\in\mathbb{Z}$

$$S_d\{x[n]\}:\qquad y[n]=2x[n]+x[n-1]-nx[n]$$
$$S_d\{x[n-n_0]\}=2x[n-n_0]+x[n-n_0-1]-nx[n-n_0]$$
$$y[n-n_0]=2x[n-n_0]+x[n-n_0-1]-(n-n_0)x[n-n_0]$$
$$S_d\{x[n-n_0]\}\neq y[n-n_0]$$

Sistemul nu este invariant în timp

c.

Notăm răspunsul sistemului la semnalul $x[n]=\delta[n]$ cu $h[n]$.

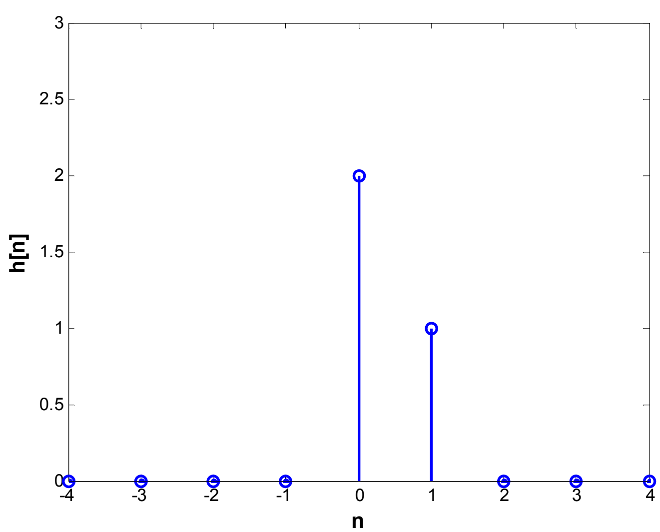
$$h[n]=S_d\{\delta[n]\}=2\delta[n]+\delta[n-1]-n\delta[n]$$

Știind, că:

$$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

Rezultă, în final:

$$h[n]=2\delta[n]+\delta[n-1]$$



Problema 3

Se consideră sistemul din figura P3.1:

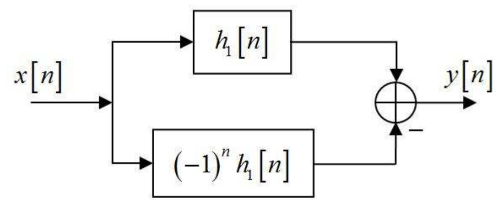


Figura P3.1

a. Determinați, în funcție de $h_1[n]$, răspunsul la impuls al sistemului

b. Pentru $H_1(\Omega)=\cos(\Omega)$, determinați răspunsul sistemului considerat la semnalul

$$x[n]=\cos\left[\frac{\pi}{4}(n+2)\right]$$

Rezolvare Problema 3

a.

$$y[n]=x[n]*\left\{h_1[n]-(-1)^n h_1[n]\right\}$$

$$h[n]=h_1[n]-(-1)^n h_1[n]$$

b.

$$H_1(\Omega)=\cos(\Omega)$$

$$H(\Omega)=H_1(\Omega)-\mathcal{F}\left\{(-1)^n h_1[n]\right\}(\Omega)$$

Termenul $(-1)^n h_1[n]=e^{j\pi n}h_1[n]$ are TFD $H_1(\Omega-\pi)$

$$e^{j\pi n}h_1[n]\leftrightarrow H_1(\Omega-\pi)$$

$$H(\Omega)=\cos(\Omega)-\cos(\Omega-\pi)=\cos(\Omega)-\left(-\cos(\Omega)\right)=2\cos(\Omega)$$

$$x[n]=\cos\left[\frac{\pi}{4}(n+2)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot n+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

Folosind metoda armonică, semnalul $y[n]$ se calculează prin:

$$y[n]=A\left|H(\Omega_0)\right|\sin\left[\Omega_0 n+\arg\left\{H(\Omega_0)\right\}\right]$$

Prin identificare, avem:

$$\Omega_0=\frac{\pi}{4}.$$

$$y[n]=-\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|\sin\left[\frac{\pi}{4}n+\arg\left\{H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}\right]$$

$$\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\arg\left\{H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\} = 0$$

În final: $y[n] = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

Problema 4

Se consideră sistemul numeric cu schema din figura P4.1:

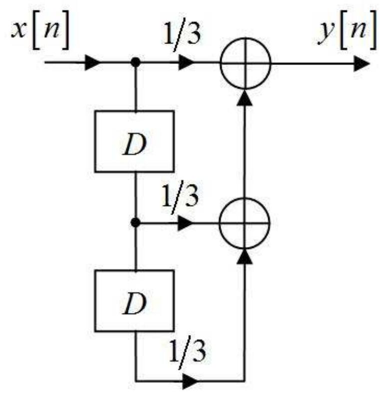
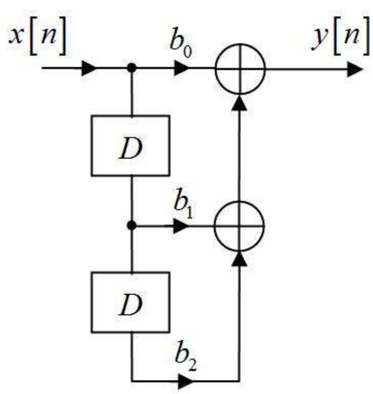


Figura P4.1

a. Determinați ecuația cu diferențe finite ce caracterizează sistemul considerat
b. Determinați răspunsul în frecvență al sistemului
c. Reprezentați grafic modulul răspunsului în frecvență
d. Calculați răspunsul sistemului, $y[n]$, dacă $x[n] = \delta[n]$ și apoi pentru $x[n] = 10\cos(\pi n)$

Rezolvare Problema 4

a.



$$y[n]=b_0x[n]+b_1x[n-1]+b_2x[n-2]$$

Prin identificare, avem: $b_0=b_1=b_2=1/3$

$$y[n]=\frac{1}{3}x[n]+\frac{1}{3}x[n-1]+\frac{1}{3}x[n-2]=\frac{1}{3}\left(x[n]+x[n-1]+x[n-2]\right)$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}x[n-k]$$

Deci,

$$y[n]=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}x[n-k]$$

b.

Folosind tabelele, avem

$$y[n]=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}x[n-k]\leftrightarrow Y(\Omega)=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}e^{-j\Omega k}X(\Omega)$$

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2}\left(e^{-j\Omega}\right)^k=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-e^{-3j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{e^{-3j\frac{\Omega}{2}}\left(e^{3j\frac{\Omega}{2}}-e^{-3j\frac{\Omega}{2}}\right)}{e^{-j\frac{\Omega}{2}}\left(e^{j\frac{\Omega}{2}}-e^{-j\frac{\Omega}{2}}\right)}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot e^{-2j\frac{\Omega}{2}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{3\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}=\frac{1}{3}\cdot e^{-j\Omega}\cdot\frac{\sin\left(\frac{3\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

Deci,

$$H(\Omega)=\frac{1}{3}\cdot e^{-j\Omega}\cdot\frac{\sin\left(\frac{3\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

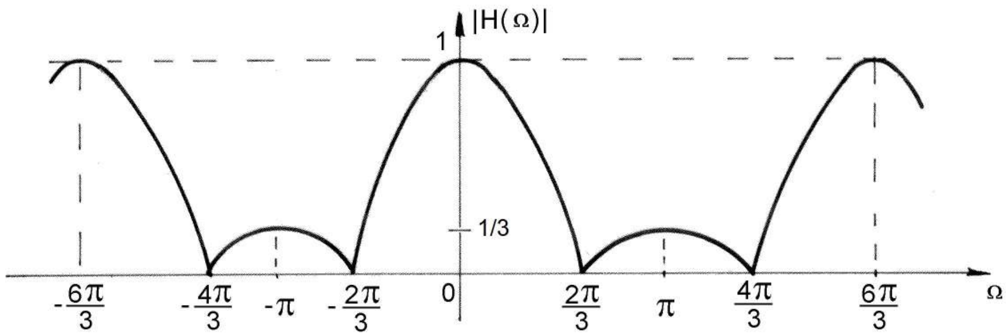
c.

$$|H(\Omega)|=\frac{1}{3}\cdot\left|\frac{\sin\left(\frac{3\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right|$$

Obs. $\sin\left(3\frac{\Omega}{2}\right)=\sin\frac{\Omega}{2}\left(3-4\sin^2\frac{\Omega}{2}\right)$

Rezultă:

$$\left|H(\Omega)\right| = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\Omega}{2}\left(3-4\sin^2\frac{\Omega}{2}\right)}{\sin\frac{\Omega}{2}} = \left|\frac{1}{3}\cdot\left(3-4\sin^2\frac{\Omega}{2}\right)\right|$$



d.

$x[n] = \delta[n]$

$y[n] = \frac{1}{3}\left(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\right)$

Pentru $x[n] = 10\cos(\pi n)$

$y[n] = A\left|H(\Omega_0)\right|\cos\left(\Omega_0 n + \arg\{H(\Omega_0)\}\right)$

Prin identificare, rezultă:

$A = 10$, $\Omega_0 = \pi$

$\left|H(\Omega_0)\right| = \frac{1}{3}$

$\arg\{H(\Omega_0)\} = -\pi$

$$y[n] = 10\cdot\frac{1}{3}\cos(\pi n - \pi) = \frac{10}{3}\cos\left(\pi(n-1)\right)$$

Problema 5

Un sistem discret liniar şi invariant în timp (DLIT) este descris de ecuaţia diferenţială cu diferenţe finite:

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-1]$$

a. Determinaţi şi reprezentaţi grafic funcţia de transfer $H(\Omega)$ a sistemului. Găsiţi şi reprezentaţi grafic funcţia pondere $h[n]$ a sistemului. Ce denumire are un astfel de sistem?

b. Determinaţi şi reprezentaţi grafic răspunsul sistemului pentru semnalul $x[n]$ din figura P5.1, dacă $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.

c. Schiţaţi o formă de implementare a sistemului folosind un număr minim de celule de întârziere.

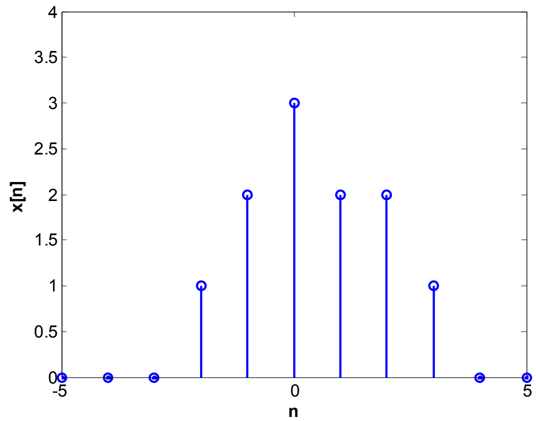


Figura P5.1

Rezolvare Problema 5

a.

$$y[n]+2y[n-1]=x[n]+2x[n-1]$$

Aplicăm transformata TFD asupra ecuației cu diferențe finite, rezultă:

$$Y(\Omega)+2e^{-j\Omega}Y(\Omega)=X(\Omega)+2e^{-j\Omega}X(\Omega)$$

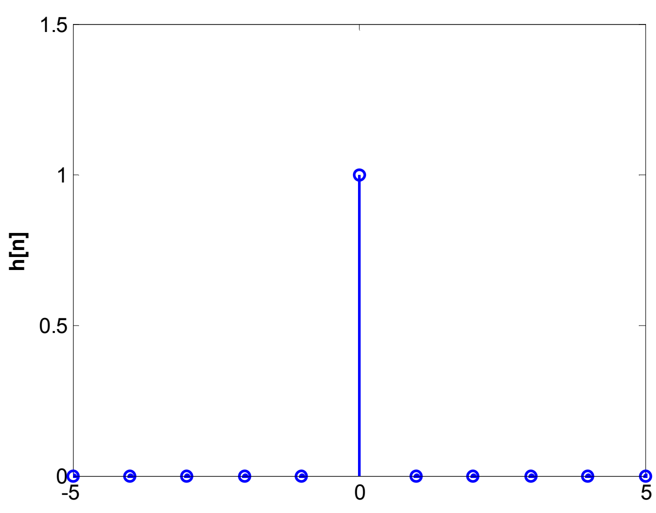
$$Y(\Omega)\left(1+2e^{-j\Omega}\right)=X(\Omega)\left(1+2e^{-j\Omega}\right)$$

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{1+2e^{-j\Omega}}{1+2e^{-j\Omega}}=1$$

Din tabel:

$$h[n]=\delta[n]$$

Sistemul se numește: ”filtru trece-tot”



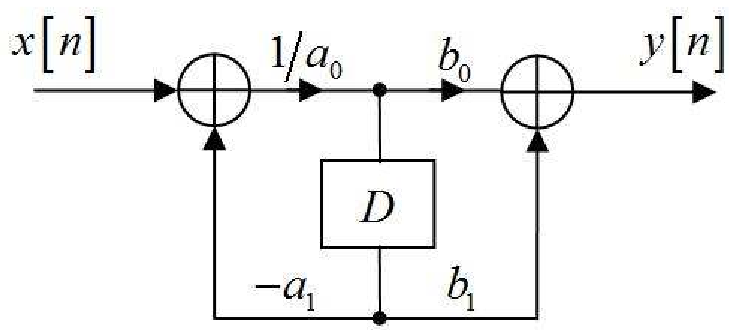
b.

$y[n]=x[n]*h[n]=x[n]*(\delta[n]-\delta[n-1])=x[n]-x[n-1]$

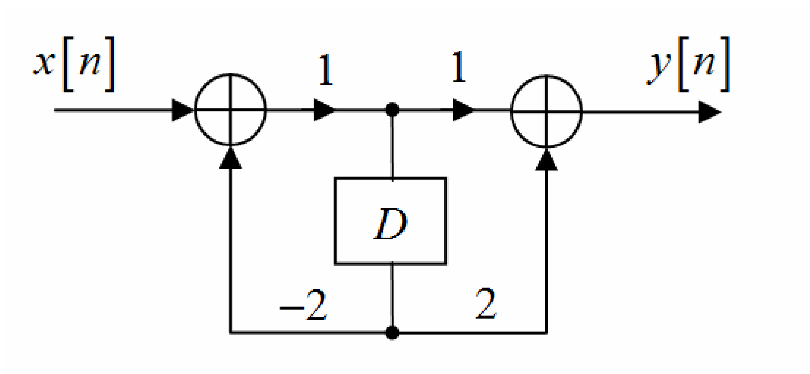
Deci

$y[n]=x[n]-x[n-1]$

c.



În cazul de față, avem:



Problema 6

Fără a determina efectiv $X(\Omega)$ pentru semnalul din figură:

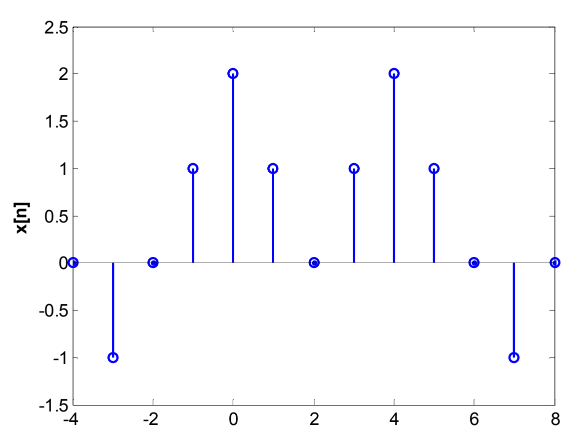


Figura P6.1

a. Calculați $X(0)$.

b. Calculați $\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)d\Omega$.

c. Calculați $X(\pi)$.

d. Schițați semnalul care are transformata $\mathrm{Re}\{X(\Omega)\}$.

e. Calculați $\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$.

Rezolvare Problema 6

a.

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega}$$

$$X(0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]=6$$

b.

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{jn\Omega}d\Omega$$

$$x[0]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)d\Omega \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)d\Omega=2\pi x[0]=4\pi$$

c.

$$\begin{aligned}
X(\pi)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\pi}=\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n]=\\
&=(-1)^{-3}\cdot(-1)+(-1)^{-2}\cdot 0+(-1)^{-1}\cdot 1+(-1)^{0}\cdot 2+(-1)^{1}\cdot 1+(-1)^{2}\cdot 0+\\
&\quad+(-1)^{3}\cdot 1+(-1)^{4}\cdot 2+(-1)^{5}\cdot 1+(-1)^{6}\cdot 0+(-1)^{7}\cdot(-1)+(-1)^{8}\cdot 0\\
&=1-1+2-1-1+2-1+1=2
\end{aligned}$$

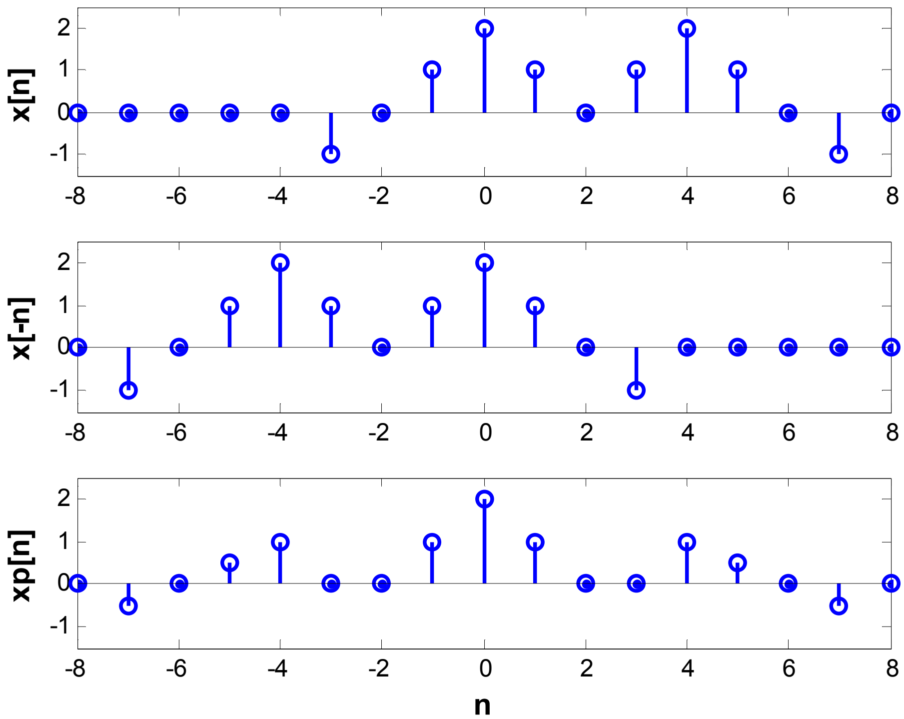
d.

$$x[n]\leftrightarrow X(\Omega)$$

$$x[-n]\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-jn\Omega} \overset{m=-n}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[m]e^{jm\Omega}=X^*(\Omega)$$

$$x[n]+x[-n]\leftrightarrow X(\Omega)+X^*(\Omega)=2\,\mathrm{Re}\{X(\Omega)\}$$

$$\frac{x[n]+x[-n]}{2}=x_p[n]=\mathrm{Re}\{X(\Omega)\}$$



e.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|X(\Omega)\right|^2 d\Omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 = 2\pi\left((-1)^2+(0)^2+(1)^2+(2)^2+(1)^2+(0)^2+(1)^2+(2)^2+(1)^2+(0)^2+(-1)^2\right)$$

$$= 2\pi\cdot(14) = 28\pi$$

Problema 7

Se consideră sistemul liniar şi invariant în timp cu răspunsul în frecvenţă: $H_1(\omega) = \dfrac{1-j\omega}{1+j\omega}$.

a. Exprimaţi şi schiţaţi dependenţa de frecvenţă a modulului şi argumentului acestui răspuns în frecvenţă. Care este expresia răspunsului la impuls al sistemului considerat ?

b. Determinaţi răspunsul sistemului considerat la semnalul $x_1(t) = A\cdot\cos t$.

c. Repetaţi punctul b) pentru semnalul $x_2(t) = e^{-t}\cdot\sigma(t)$. Reprezentaţi grafic rezultatul obţinut.

d. Se consideră sistemul liniar şi invariant în timp cu răspunsul în frecvenţă: $H_2(\omega) = \dfrac{10-j\omega}{10+j\omega}$.

Reprezentaţi grafic caracteristicile Bode ale sistemului obţinut prin conectarea în cascadă a sistemelor cu răspunsurile în frecvenţă $H_1(\omega)$ şi $H_2(\omega)$. Cum aţi denumi un astfel de sistem? În ce situaţii credeţi că este utilă folosirea sa?

Rezolvare Problema 7

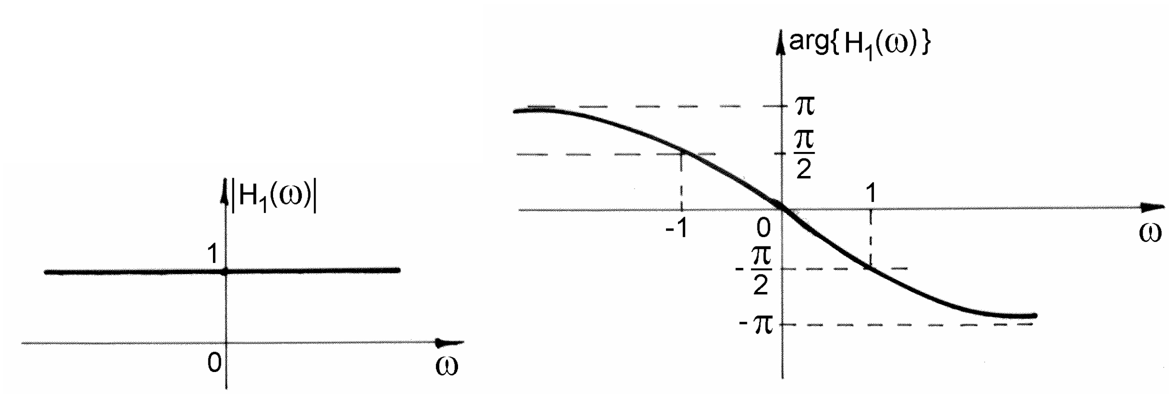
a.

$$H_1(\omega)=\frac{1-j\omega}{1+j\omega}=\frac{(1-j\omega)^2}{1+\omega^2}=\frac{1-\omega^2-2j\omega}{1+\omega^2}$$

$$|H_1(\omega)|=1 \quad \forall\ \omega\in\Re$$

$$\arg\{H_1(\omega)\}=\arg\{1-j\omega\}-\arg\{1+j\omega\}=-arctg\{\omega\}-arctg\{\omega\}=-2arctg\omega$$

În figura P1.1 a.) se prezintă modulul lui $H_1(\omega)$, iar în figura P1.1 b.) se reprezintă argumentul lui $H_1(\omega)$.



a). b).

Figura P7.1

$$H_1(\omega)=\frac{1-j\omega}{1+j\omega}=\frac{-1-j\omega}{1+j\omega}+\frac{2}{1+j\omega}=-1+\frac{2}{1+j\omega}$$

$$h_1(t)=-\delta(t)+2\cdot e^{-t}\cdot\sigma(t)$$

b.

$$x_1(t)=A\cdot\cos t=\frac{A}{2}e^{jt}+\frac{A}{2}e^{-jt}$$

Rezultă:

$$y_1(t)=\frac{A}{2}H_1(1)\cdot e^{jt}+\frac{A}{2}H_1(-1)e^{-jt}=\frac{A}{2}\left[\frac{1-j}{1+j}e^{jt}+\frac{1+j}{1-j}e^{-jt}\right]=$$

$$=\frac{A}{2}\left[\frac{1-2j-1}{2}e^{jt}+\frac{1+2j-1}{2}e^{-jt}\right]=\frac{A}{2}\left[-j\cdot e^{jt}+j\cdot e^{-jt}\right]=$$

$$=-\frac{jA}{2}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)=-\frac{jA}{2}\cdot(2j\cdot\sin t)=A\cdot\sin t$$

c.

$$x_2(t) = e^{-t}\cdot\sigma(t) \quad\Rightarrow\quad X_2(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \quad\Rightarrow$$

$$Y(\omega) = X_2(\omega)\cdot H_1(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}\cdot\frac{(1-j\omega)}{1+j\omega} = \frac{1-j\omega}{(1+j\omega)^2} = \frac{A}{1+j\omega} + \frac{B}{(1+j\omega)^2} =$$

$$= \frac{A+B+j\omega A}{(1+j\omega)^2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A+B=1 \\ A=-1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \end{cases} \quad\Rightarrow$$

$$Y(\omega) = -\frac{1}{1+j\omega} + \frac{2}{(1+j\omega)^2} \quad\Rightarrow\quad y(t) = -e^{-t}\cdot\sigma(t) + 2t\cdot e^{-t}\cdot\sigma(t)$$

În figura P7.2 se prezintă variaţia temporală a lui $y(t)$.

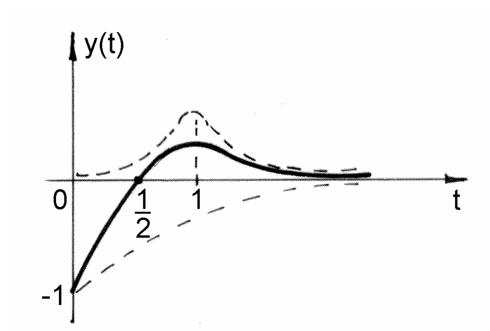


Figura P7.2

d).

$$H_2(\omega) = \frac{10-j\omega}{10+j\omega}$$

Prin conectarea în cascadă a sistemelor cu răspunsurile în frecvenţă $H_1(\omega)$ şi $H_2(\omega)$ se obţine un sistem având următorul răspuns în frecvenţă:

$$H(\omega) = H_1(\omega)\cdot H_2(\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega}\cdot\frac{10-j\omega}{10+j\omega}$$

$$20\log|H(\omega)| = 0 \quad\Rightarrow\forall\quad \omega\in\Re$$

În figura P7.3 se prezintă variaţia frecvenţială a lui $20\log|H(\omega)|$.

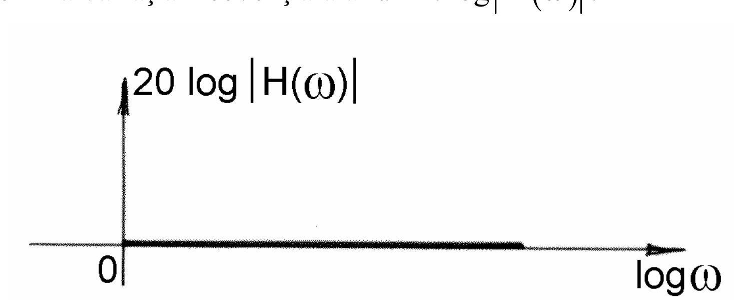


Figura P7.3

$$\arg\left\{H_2(\omega)\right\} = \arg\left\{10 - j\omega\right\} - \arg\left\{10 + j\omega\right\} = -2arctg\frac{\omega}{10}$$

În figura P7.4 se reprezintă caracteristicile Bode ale sistemului obţinut.

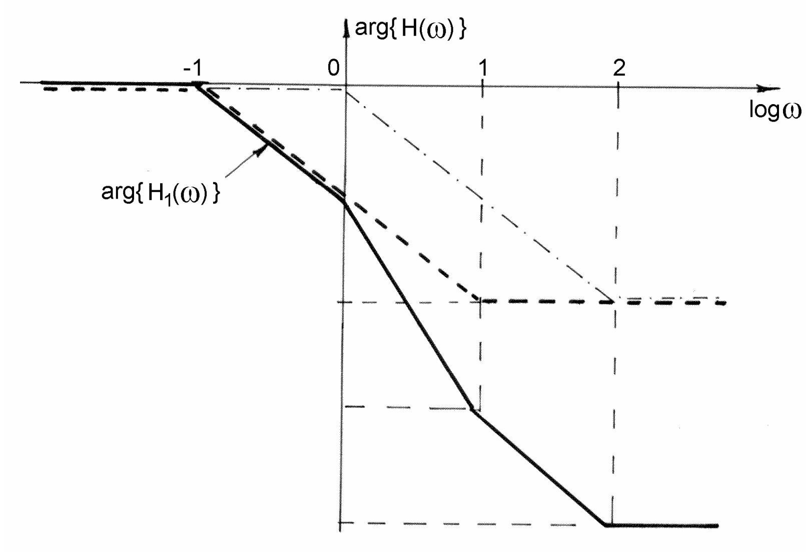


Figura P7.4

Observații:

- Sistemul este un filtru trece-tot;
- Se poate utiliza pentru corecţii de fază.

Problema 8

Relația dintre semnalele de intrare $x(t)$ și ieșire $y(t)$ ale unui sistem liniar și invariant în timp, cauzal este:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10 \cdot y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot z(t-\tau) \cdot d\tau - 5x(t) \quad \text{unde } z(t) = 6 \cdot \delta(t) + 99 \cdot e^{-t} \cdot \sigma(t)$$

a. Determinați răspunsul în frecvență al sistemului, $H(\omega)$ și schițați-i caracteristicile Bode.

b. Determinați răspunsul la impuls al sistemului.

Rezolvare Problema 8

a.

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10 \cdot y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot z(t-\tau) \cdot d\tau - 5x(t) \qquad \text{unde}$$

$$z(t) = 6 \cdot \delta(t) + 99 \cdot e^{-t} \cdot \sigma(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10 \cdot y(t) = x(t) * z(t) - 5 \cdot x(t)$$

Se aplică transformata Fourier asupra ecuației de mai sus, rezultă:

$$j\omega \cdot Y(\omega)+10\cdot Y(\omega)=X(\omega)\cdot\left[6+\frac{99}{1+j\omega}\right]-5\cdot X(\omega)$$

$$Y(\omega)\cdot(j\omega+10)=X(\omega)\cdot\left(1+\frac{99}{1+j\omega}\right) \Leftrightarrow Y(\omega)\cdot(10+j\omega)=X(\omega)\cdot\frac{100+j\omega}{1+j\omega}$$

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{100+j\omega}{(1+j\omega)\cdot(10+j\omega)}=10\cdot\frac{1+j\frac{\omega}{100}}{(1+j\omega)\cdot\left(1+j\frac{\omega}{10}\right)}$$

În figura P8.1 sunt prezentate variațiile lui $20\log|H(\omega)|$ și $\arg\{H(\omega)\}$ în funcție de frecvență.

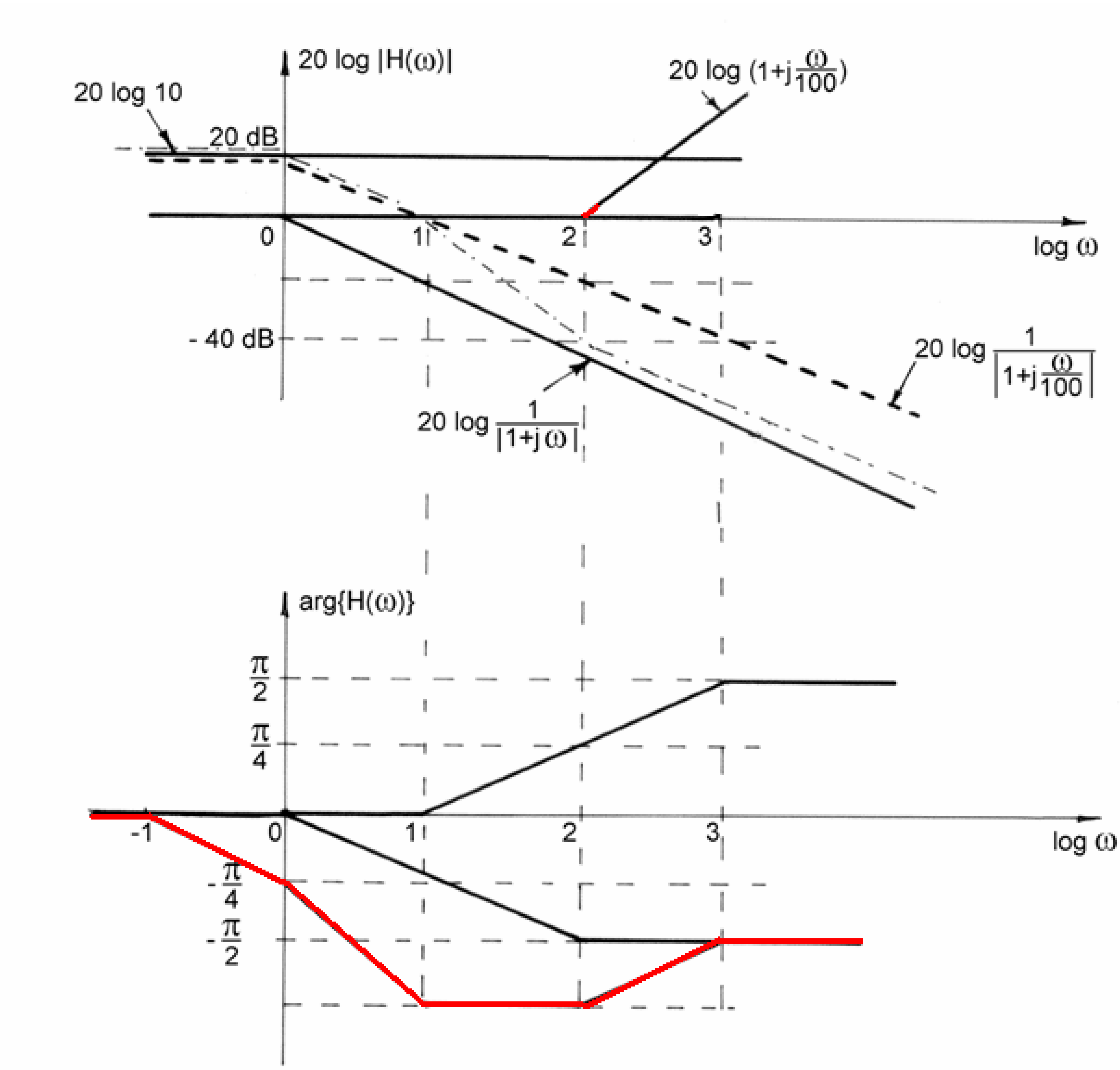


Figura P8.1

b).

$$H(\omega)=\frac{A}{1+j\omega}+\frac{B}{1+j\dfrac{\omega}{10}};$$

$$A=(1+j\omega)\cdot H(\omega)\Bigg|_{j\omega=1}=10\cdot\frac{1+j\dfrac{\omega}{100}}{1+j\dfrac{\omega}{10}}\Bigg|_{j\omega=1}=10\cdot\frac{1-\dfrac{1}{100}}{1-\dfrac{1}{10}}=10\cdot\frac{\dfrac{99}{100}}{\dfrac{9}{10}}=$$

$$=10\cdot\frac{99}{100}\cdot\frac{10}{9}=\frac{11}{10}\cdot 10\quad\Rightarrow\quad A=\frac{11}{10}\cdot 10\quad\Rightarrow\quad A=11$$

$$B=\left(1+j\frac{\omega}{10}\right)\cdot H(\omega)\Bigg|_{j\omega=-10}=10\cdot\frac{1+j\dfrac{\omega}{100}}{1+j\omega}\Bigg|_{j\omega=-10}=10\frac{\dfrac{9}{10}}{(-9)}=$$

$$=-\frac{10}{9}\cdot\frac{9}{10}=-1\quad\Rightarrow$$

$$H(\omega)=\frac{11}{1+j\omega}-\frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{10}}\quad\Rightarrow$$

$$h(t)=11\cdot e^{-t}\cdot\sigma(t)-10\cdot e^{-10t}\cdot\sigma(t)$$

Problema 9

Se dă sistemul cu răspunsul la impuls:

$$h_N(t)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\cdot\delta(t-nT)$$

a. Cum se numește un astfel de sistem?
b. Determinați expresia răspunsului în frecvență al acestui sistem.
c. Reprezentați grafic dependența de frecvență a modulului și argumentului acestui răspuns pentru $N=2$.

Rezolvare Problema 9

a.

$$h_N(t)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\cdot\delta(t-nT)$$

Un astfel de circuit este un "mediator".

b.

$$H_N(\omega)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\omega nT}=\frac{1}{N}\cdot\frac{1-\left(e^{-j\omega T}\right)^N}{1-e^{-j\omega T}}$$

c.

Avem $N = 2$. Rezultă în continuare:

$$H_2(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-2j\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + e^{-j\omega T}\right)$$

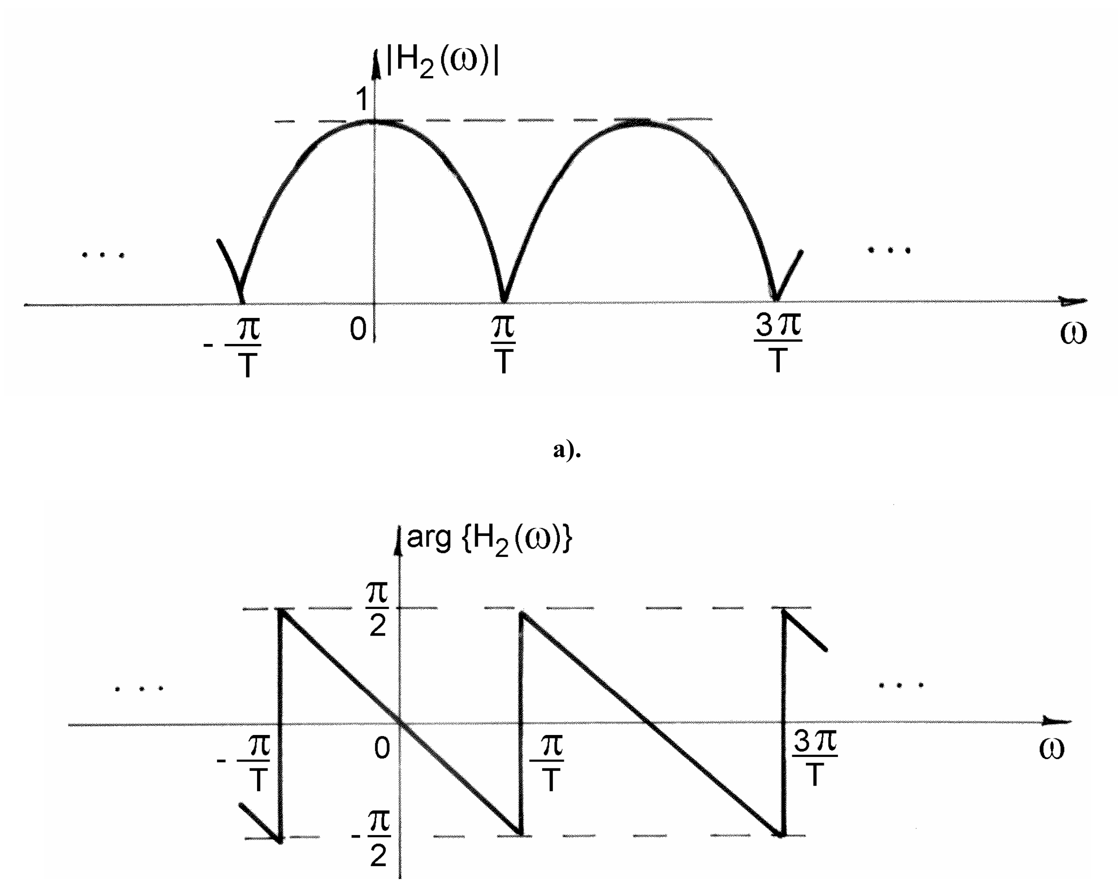
$$H_2(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \cos \omega T - j \cdot \sin \omega T\right) \quad \Rightarrow$$

$$\left|H_2(\omega)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + \cos \omega T\right)^2 + \sin^2 \omega T} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2\cos \omega T + 1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos^2 \frac{\omega T}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\cos \frac{\omega T}{2}\right| \cdot \sqrt{2} = \left|\cos \frac{\omega T}{2}\right|$$

$$\arg\left\{H_2(\omega)\right\} = -arctg \frac{\sin \omega T}{1 + \cos \omega T} = -arctg \frac{2\sin \frac{\omega T}{2} \cdot \cos \frac{\omega T}{2}}{2\cos^2 \frac{\omega T}{2}} = -arctg\left(tg \frac{\omega T}{2}\right)$$

În figura P9.1 sunt prezentate variațiile în frecvență ale modulului (Figura P9.1a) și argumentului (Figura P9.1b) funcției $H_2(\omega)$.



a).

b).

Figura 9.1

Problema 10

Se consideră semnalul $x(t)$ cu transformata Fourier $X(\omega)$ al cărei grafic este reprezentat în figura P10.1 și semnalul $p(t)$ periodic cu pulsația fundamentală, ω_0.

a. Determinați transformata Fourier a semnalului $y(t)=x(t)\cdot p(t)$.

b. Schițați spectrul lui $y(t)$ pentru fiecare dintre următoarele alegeri ale lui $p(t)$:

1). $p(t)=\cos t$; **2**). $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-\pi\cdot n)$; **3**). $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-4\pi n)$.

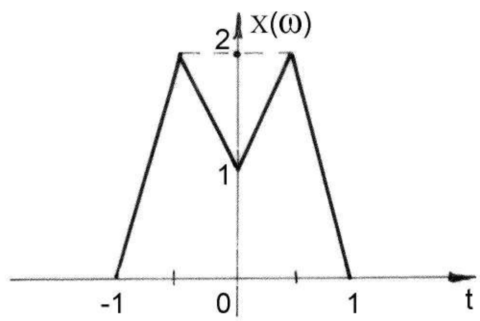


Figura P10.1

Rezolvare Problema 10

a).

$$y(t)=x(t)\cdot p(t) \;\Rightarrow\; Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[X(\omega)*P(\omega)\right]$$

$$p(t)=\sum_k c_k\cdot e^{jk\omega_0 t} \;\Rightarrow\; P(\omega)=2\pi\sum_k c_k\cdot\delta(\omega-k\omega_0)$$

$$Y(\omega)=\sum_k c_k\cdot X(\omega-k\omega_0)$$

b).

$p(t)=\cos t$; $c_1=c_{-1}=\frac{1}{2}$ și $c_k=0 \quad \forall k\neq\{-1,1\}$

$$Y(\omega)=\frac{1}{2}X(\omega-1)+\frac{1}{2}X(\omega+1)$$

În figura P10.2 este reprezentat spectrul de frecvență $Y(\omega)$ pentru semnalul $p(t)$ definit la punctul b).1.

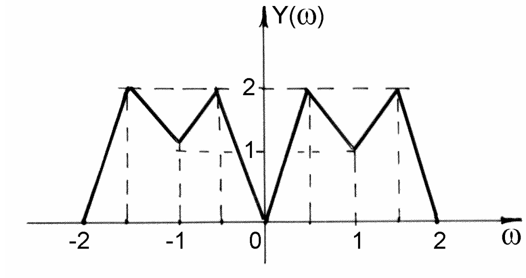


Figura P10.2

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-\pi\cdot n)=\delta_{\pi}(t) \leftrightarrow P(\omega)=2\cdot\delta_2(\omega)$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot\left[X(\omega)*\delta_2(\omega)\right]=\frac{1}{\pi}\sum_n X(\omega-2n)$$

În figura P10.3 este reprezentat spectrul de frecvență $Y(\omega)$ pentru semnalul $p(t)$ definit la punctul b).

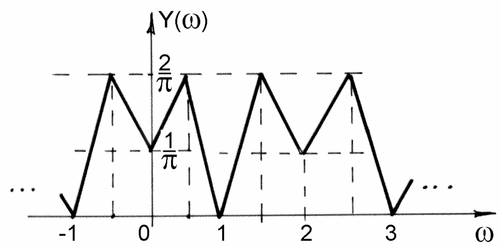


Figura P10.3

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-4\pi n)=\delta_{4\pi}(t) \Rightarrow P(\omega)=\frac{1}{2}\cdot\delta_{\frac{1}{2}}(\omega)$$

$$Y(\omega)=\frac{1}{4\pi}\left[X(\omega)*\delta_{\frac{1}{2}}(\omega)\right]=\frac{1}{4\pi}\left[X(\omega)*\sum_k\delta\left(\omega-k\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{4\pi}\sum_k X\left(\omega-k\frac{1}{2}\right)$$

În figura P10.4 este reprezentat spectrul de frecvență $Y(\omega)$ pentru semnalul $p(t)$ definit la punctul b).

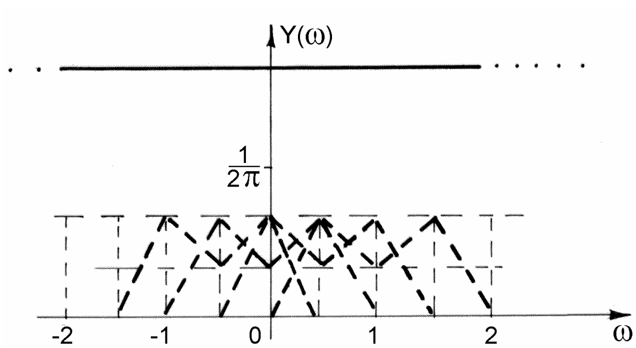


Figura P10.4

1. Probleme propuse

Problema 1

Fiind date semnalele: $x_1(t)=\delta(t+1)+\delta(t-1)$ şi $x_2(t)=\dfrac{d}{dt}\{\sigma(-2-t)+\sigma(t-2)\}$.

a. Să se reprezintă grafic $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ în domeniul timp.

b. Să se calculeze transformate Fourier corespunzătoare $X_1(\omega)$ şi $X_2(\omega)$.

c. Să se reprezinte grafic modulul funcţiilor $X_1(\omega)$ şi $X_2(\omega)$.

Problema 2

Pentru un sistem liniar şi invariant în timp, ecuaţia ce descrie legătura între intrare şi ieşire este:

$$\frac{dy(t)}{dt}+10y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)z(t-\tau)d\tau-5x(t),\text{ unde } z(t)=9e^{-t}\sigma(t)+6\delta(t).$$

a. Determinaţi răspunsul în frecvenţă al sistemului $H(\omega)$. Ce denumire are un astfel de sistem. Reprezentaţi grafic caracteristicile BODE (modulul şi argumentul).

b. Determinaţi $h(t)$ pentru acest sistem.

c. Determinaţi răspunsul sistemului la semnalul $x(t)=5\cos 10t$.

Problema 3

Se consideră sistemul descris de ecuația diferențială:

$$y(t)+\frac{1}{10}\cdot\frac{dy(t)}{dt}=x(t)-\frac{1}{10}\cdot\frac{dy(t)}{dt}$$

a. Să se determine răspunsul în frecvență al sistemului

b. Reprezentați grafic diagramele BODE pentru acest sistem

c. Utilizând aceste diagrame, să se determine semnalul de la ieșirea sistemului considerat, dacă la intrare se aplică semnalul: $x(t)=\cos 100t$

Problema 4

Fie sistemul din figura P4.1:

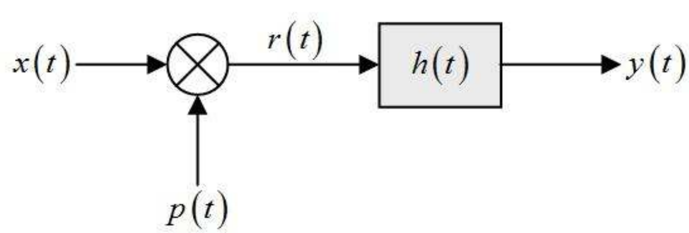


Figura P4.1

unde $x(t)=\dfrac{\sin(4\pi t)}{\pi t}$, $p(t)=2\cos(2\pi t)$ şi răspunsul la impuls este dată prin:

$$h(t)=1+3\sin(4\pi t)+2\cos(8\pi t).$$

a. Determinaţi şi reprezentaţi grafic $R(\omega)$, transformata Fourier a semnalului $r(t)$.

b. Determinaţi şi reprezentaţi grafic $H(\omega)$.

c. Determinaţi şi reprezentaţi grafic semnalul $y(t)$.

d. Repetaţi punctul c), dacă $r(t) = x(t)$.

Problema 5

Se consideră sistemul, având răspunsul la impuls: $h(t) = \frac{\sin 6\pi t}{\pi t} \cdot \cos 12\pi t$.

a. Determinaţi şi reprezentaţi grafic funcţia de transfer a sistemului, $H(\omega)$.

b. Determinaţi răspunsul sistemului la semnalul de intrare $x(t) = \cos 2\pi t + \sin 10\pi t$.

c. Ce fel de filtru este acesta? Justificaţi răspunsul!

Problema 6

Notând cu $X(\omega)$ transformata Fourier a semnalului $x(t)$, cu reprezentarea grafică din figura P6.1:

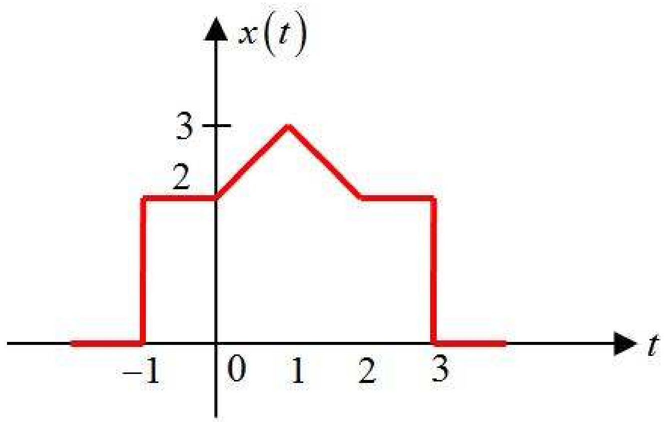


Figura 6.1

Determinați fără a calcula explicit, $X(\omega)$:

a.) $X(0)$;

b.) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,d\omega$;

c.) $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega$

d.) Schițați transformata Fourier inverrsă a lui $\mathrm{Re}\{X(\omega)\}$.

Problema 7

Se consideră SLIT discret, cu răspunsul la impuls: $h[n]=\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]+\frac{1}{2}\delta[n+1]$

a. Calculaţi şi reprezentaţi grafic funcţia de transfer, $H(\Omega)$, şi arătaţi (pe baza graficului obţinut) că acest sistem este un filtru trece jos.

b. Determinaţi răspunsul $y[n]$ al sistemului considerat la semnalul $x[n]=\sin\frac{\pi}{2}n$.

c. Reprezentaţi grafic spectrul de amplitudine şi spectrul de fază al semnalului $y[n]$.

Problema 8

Un sistem liniar și cauzal este descris de ecuația cu diferențe finite:

$$y[n]-ay[n-1]=bx[n]+x[n-1],\ a\in\Re,\ |a|<1$$

a. Determinați funcția de transfer a sistemului, $H(\Omega)$

b. Pentru ce valoare b se obține $|H(\Omega)|=1$, pentru $\forall\Omega$? Ce denumire are un astfel de sistem?

c. Schițați $\arg\{H(\Omega)\}$ pentru $a=0.5$ în condițiile de la punctul b.

Problema 9

Fiind dat sistemul în timp discret $x[n]$, cu spectrul, $X(\Omega)$, având restricția la perioada principală, $X_r(\Omega)=\cos\Omega\left[\sigma\left[\Omega+\frac{\pi}{2}\right]-\sigma\left[\Omega-\frac{\pi}{2}\right]\right]$.

Schițați spectrele semnalelor $z[n]=x[n]\cdot p[n]$ pentru fiecare dintre secvențele $p[n]$, de mai jos:

a. $p[n]=\cos\pi n$

b. $p[n]=\cos\frac{\pi}{2}n$

c. $p[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-2k]$