Filtre numerice transversale

1. Scopul lucrării

Se studiază în domeniile timp şi frecvență, filtrele transversale în timp discret. Prin particularizarea structurii acestor filtre se obține mediatorul numeric alunecător. Se studiază acest tip de sistem din perspectiva filtrelor adaptate.

2. Filtre numerice transversale în timp discret

Ecuația cu diferențe finite care caracterizează filtrul numeric, care la excitația $s_i[n]$, răspunde cu semnalul $s_0[n]$ este:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s_i[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k s_0[n-k] \tag{1}$$

Condițiile inițiale se consideră nule.
Dacă singurul coeficient a_k nenul este a_0 atunci filtrul implementat este un sistem nerecursiv. Aceste filtre au proprietatea ca răspunsul lor la impuls este de durată finită şi de aceea se mai numesc filtre cu răspuns finit la impuls (FIR). Pentru $a_0 = 1$, ecuația care descrie un astfel de sistem este:

$$s_0[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k s_i[n-k] \tag{2}$$

Forma canonică I de implementare a sistemului descris de ecuația (2) este prezentată în figura 1.

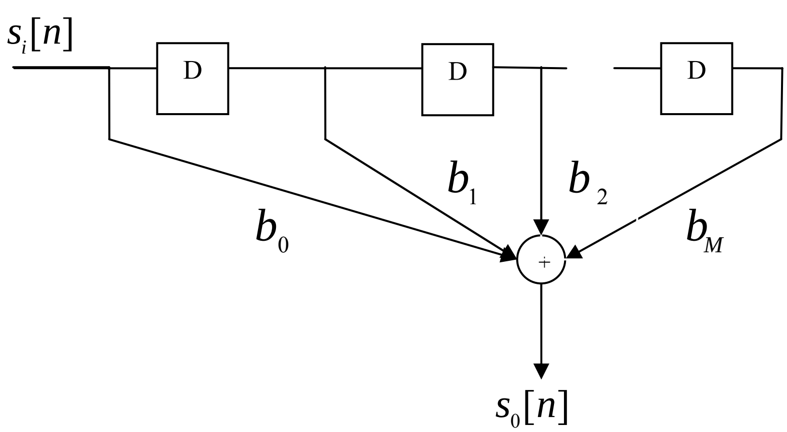

Fig.1 Forma canonică I de implementare pentru un sistem FIR.

Pe baza figurii se constată ca operațiile de întârziere, cele de înmulțire cu constante şi cele de însumare se realizează pe direcții transversale, de unde vine şi denumirea de filtre care se implementează în acest mod.

Relația (2) conduce la următoarea expresie a răspunsului la impuls al filtrului transversal:

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] \tag{3}$$

din care se poate deduce expresia răspunsului în frecvență:

$$H(\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega} \tag{4}$$

3. Mediatorul numeric de semnal

Dacă coeficienții b_k au valoarea $1/M$ pentru $k = \overline{0, M-1}$ şi în rest sunt nuli se obține ecuația cu diferențe finite:

$$s_0[n] = (1/M)\sum_{k=0}^{M-1} s_i[n-k] \tag{5}$$

Având în vedere că semnalul $s_0[n]$ se obține din semnalul $s_i[n]$, mediind aritmetic ultimele M eşantioane ale acestuia, sistemul obținut se numeşte mediator numeric. Răspunsul său la impuls este:

$$h_0[n] = (1/M)\sum_{k=0}^{M-1} \delta[n-k] \tag{6}$$

iar răspunsul său în frecvență este:

$$H(\Omega) = (1/M)\sum_{k=0}^{M-1} e^{-jk\Omega} = (1/M)e^{-j\Omega(M-1)/2}\sin(M\Omega/2)/\sin(\Omega/2) \tag{7}$$

Pentru $M = 4$ răspunsul la impuls şi modulul răspunsului în frecvență ale mediatorului numeric sunt prezentate în figura 2.

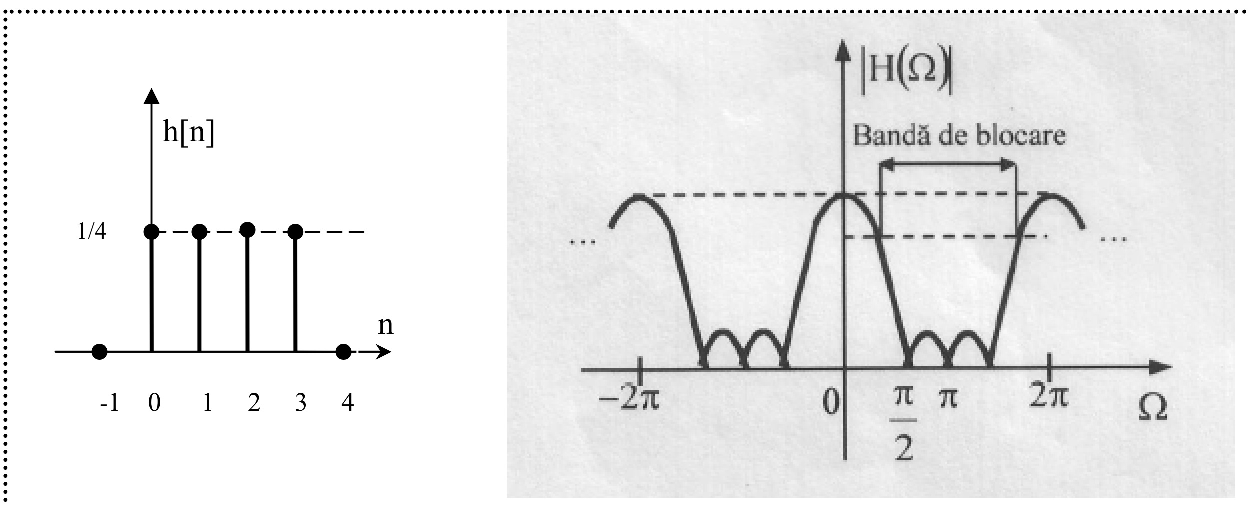

Fig.2 Răspunsul la impuls şi modulul răspunsului în frecvență ale mediatorului numeric, M=4.

Se constată că mediatorul este un filtru trece jos, care la anumite frecvențe introduce atenuări infinite. Poziția pe axa frecvențelor a acestora precum şi atenuarea minimă în banda de blocare pot fi fixate cu ajutorul constantei M .
Analizând ecuația (5), se constată că, sincron cu derularea temporală a eşantioanelor semnalului $s_0[n]$, are loc "alunecarea temporală" a mediei aritmetice a ultimelor M eşantioane ale semnalului $s_i[n]$. De aceea sistemul prezentat este numit mediator alunecător.

4. Filtre numerice adaptive la semnale în timp discret

Se consideră că trebuie transmisă secvența utilă $s_i[n]$, de durata finită M , acoperită aditiv de zgomot $n_i[n]$.În scopul reducerii zgomotului din semnalul:

$$x[n] = s_i[n] + n_i[n] \tag{8}$$

acest semnal este prelucrat de către sistemul nerecursiv în timp discret cu răspunsul la impuls $h[n]$, obținându-se semnalul $y[n]$:

$$y[n] = s_0[n] + n_0[n] \tag{9}$$

unde $s_0[n]$ reprezintă componenta utilă a semnalului $x[n]$ iar $n_0[n]$ componenta sa aleatoare. Problema este determinarea răspunsului la impuls $h[n]$ al acelui sistem, care asigură la ieşirea sa un raport semnal pe zgomot maxim, la un moment de timp n_0. Sistemul care satisface aceasta condiție se numeşte filtru adaptat la semnalul $s_i[n]$. Semnalele $s_i[n]$ şi $s_0[n]$ sunt de durată finită deci de putere nulă. Raportul semnal pe zgomot la ieşire trebuie să depindă de timp, pentru a putea fi maxim la momentul n_0. Din aceste motive formula de calcul al raportului semnal pe zgomot la ieşire este:

$$SNR_0 = s_0^2[n] / P_{n0}[n] \tag{10}$$

unde cu $P_{n0}[n]$ s-a notat puterea zgomotului de la ieşire. Dar:

$$s_0[n] = s_i[n] * h[n] = \sum_{p=0}^{M-1} s_i[p] \cdot h[n-p] \tag{11}$$

Folosind inegalitatea Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, se poate scrie:

$$s_0^2[n] \le \left(\sum_{p=0}^{M-1} s_i^2[p] \right) \left(\sum_{p=0}^{M-1} h^2[n_0 - p] \right) \tag{12}$$

Egalitatea are loc în ultima relație dacă:

$$h[n_0 - p] = a s_i[p] \quad \forall p = \overline{0, M-1} \tag{13}$$

unde a este o constantă. Deci sistemul care răspunde la semnalul $s_i[n]$ cu un semnal $s_0[n]$, maxim la momentul n_0, este acela al cărui răspuns la impuls este:

$$h[n] = as_i[n_0 - n] \qquad n = \overline{n_0 - (M-1), n_0} \tag{14}$$

dacă $n_0 = M - 1$, atunci:

$$h[n] = as_i[M-1-n] \qquad n = \overline{0, M-1} \tag{15}$$

Se consideră ca $n_0[n]$ este un semnal aleator de tip zgomot alb, ale cărui eşantioane nu sunt corelate cu cele ale semnalului $s_i[n]$ şi sunt independente între ele. Se poate demonstra că, din toate sistemele nerecursive cu răspunsul la impuls de durata M, acela care asigură la ieşirea sa un raport pe zgomot SNR_0 maxim este cel dat de relația (14).

De aceea, acest filtru adaptat la semnalul $s_i[n]$ în ipoteza ca acesta este perturbat aditiv de zgomot alb. Dacă semnalul util de la intrarea filtrului adaptat are expresia:

$$s_i[n] = \begin{cases} 1, n = \overline{0, M-1} \\ 0, rest \end{cases} \tag{16}$$

şi dacă constanta a este aleasa de valoare $1/M$, atunci expresia răspunsului la impuls al filtrului adaptat la acest semnal este:

$$h[n] = \begin{cases} 1/M, n = \overline{0, M-1} \\ 0 \quad\ , rest \end{cases} \tag{17}$$

Deci mediatorul alunecător este un filtru adaptat pentru semnalul definit de relația (16). Acest semnal este de durata finită şi amplitudine constantă.

Mediatorul numeric în timp discret poate fi folosit pentru îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot al semnalelor periodice în timp continuu.

5. Desfăşurarea lucrării

Obiectul acestei lucrări de laborator este un sistem cu schema bloc din figura 1, simulat in Matlab. Semnalul util de la intrarea sistemului este o sinusoidă în timp discret, cu N eşantioane pe o perioadă (maxim 512). Numărul M, putere a lui 2, are valorile 2, 4, 8, 16, 32, 64.

5.1. Folosind programul *"ftrans"*, se vizualizează şi se reprezintă răspunsul la impuls al sistemului şi semnalele de intrare/ieşire $s_i[n]$ şi $s_0[n]$ pentru M de valori 2, 4, 8, 16, 32 şi 64.

5.2. Se determină caracteristicile de frecvență ale sistemelor simulate la punctul 5.1. şi se reprezintă pe hârtie milimetrică. Se compară cu rezultatul obținut în Matlab.

5.3. Se amestecă semnalul $s_i[n]$ cu un zgomot alb de putere cunoscută, obținându-se semnalul $x[n]$. Raportul semnal pe zgomot la intrare SNRi se calculează împărțind pătratul valorii efective a semnalului $s_i[n]$ la puterea zgomotului.

Se alege lungimea filtrului M=2, 4, 8, 16, 32, 64. Se calculează raportul semnal pe zgomot la ieşire SNRo, împărțind pătratul valorii efective ale semnalelor $s_0[n]$ şi zgomot. Se calculează îmbunătățirea raportului semnal pe zgomot Γ folosind raportul SNRo/SNRi. Se fac operațiile pentru celelalte 5 valori ale lui M. Se reprezintă pe hârtie milimetrică dependența $\Gamma(M)$.

6. Exerciții în MATLAB

6.1. Fenomenul Gibbs

6.1.1. Semnalul dreptunghiular poate fi reprezentat ca o serie de semnale sinusoidale sau cosinusoidale armonice. Considerăm suma parțială a următoarelor semnale periodice: $x(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin\omega_0 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t+\ldots\right]=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_0 t$, unde *n* este un număr impar.

Exemplul următor de comenzi MATLAB foloseşte o buclă pentru a genera această sumă pentru orice număr impar:

```
n=input('Introduceti un numar impar:    ');
omega_0=0:0.01:2*pi;
x=0;
for k=1:2:n;
x=x+1/k*sin(k*omega_0);
end
x=4/pi*x;
plot(omega_0,x), xlabel('omega_0')
text(3.5,.7,['Suma a  ', num2str((n+1)/2), ' unde sinusoidale'])
```

Editați şi rulați secvența de mai sus pentru diferite numere impare.

6.2. Transformata Fourier în timp discret

6.2.1. Să se calculeze transformata Fourier discretă a secvenței: $x_1[n]=\sigma[n]-\sigma[n-8]$, pentru $0\le n\le 20$. Să se reprezinte grafic partea reală, partea imaginară, modulul şi faza transformatelor Fourier discrete calculate.

```
n=0:20;
x1=[ones(1,8), zeros(1,13)];
stem(x1)
X=fft(x1,512); %vezi help fft
```

Calculul transformatei Fourier discrete s-a efecuat într-un număr de 512 de puncte.

```
plot(abs(X)),grid; %vezi help abs
```

Această reprezentare corespunde intervalului de frecvență [0,2π). Prin utilizarea comenzii `fftshift` se reprezintă în intervalul [-π, π). În acest scop se generează un vector cu pas linear care conține în intervalul respectiv un număr de elemente egal cu lungimea transformatei Fourier discrete calculate în 512 puncte.

```
w=-pi:2*pi/512:pi-2*pi/512;
plot(w,fftshift(abs(X))),grid %vezi help fftshift

plot(w,fftshift(angle(X))),grid

subplot(2,1,1), plot(w,fftshift(real(X))),grid
subplot(2,1,1), plot(w,fftshift(imag(X))),grid
```

Exerciții

Utilizând exemplul de mai sus, determinați şi reprezentați grafic partea reală, partea imaginară, modulul şi faza transformatelor Fourier discrete pentru următoarele semnale:

$x_1[n] = \delta[n]$ pentru $0 \le n \le 10$

$x_2[n] = \delta[n-1] - \delta[n-3] + \delta[n-5]$ pentru $0 \le n \le 10$

$x_3[n] = \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ pentru $0 \le n \le 20$

$x_4[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)$ pentru $0 \le n \le 20$

6.3. Răspunsul la impuls al unui sistem liniar şi invariant în timp discret

6.3.1. Să se determine şi să se reprezinte grafic funcția pondere a unui SLITD definit prin:

$$y[n] - 0.9y[n-1] = 0.3x[n] + 0.6x[n-1] + 0.6x[n-2]$$

Rezolvare

```
b=[0.3,0.6,0.6];
a=[1,-0.9];
[h,t]=impz(b,a) %s-a calculat răspunsul la impuls al sistemului. Vezi help impz
impz(b,a), grid
stem(t,h), grid
```

Verificați şi exprimați efectul comenzii:

```
impz(b,a,40,3), grid
```

Exerciții

Să se determine şi să se reprezinte grafic funcția pondere a unui sistem definit prin:

1. $y[n] = x[n] - 1.27x[n-1] + 0.81x[n-2] - 0.5x[n-3] + 0.125x[n-4]$
2. $y[n] + 0.9y[n-1] = x[n]$
3. $y[n] + 0.13y[n-1] + 0.52y[n-2] + 0.3y[n-3] = 0.16x[n] - 0.48x[n-1] + 0.48x[n-2] - 0.16x[n-3]$
4. $y[n] + 0.9y[n-2] = 0.3x[n] + 0.6x[n-1] + 0.3x[n-2]$

6.4. Răspunsul unui SLITD la un semnal de intrare

1. Să se determine şi să se reprezinte grafic răspunsul unui sistem definit prin:

$$y[n]-0.9y[n-1]=0.3x[n]+0.6x[n-1]+0.6x[n-2]$$

la semnalul de intrare $x_1[n]=\sigma[n]-\sigma[n-10]$ pentru $0 \le n \le 40$.

Rezolvare

```
b=[0.3,0.6,0.6]
a=[1,-0.9]
x=[ones(1,10), zeros(1,31)];
y=filter(b,a,x); %vezi help filter
n=0:40;
subplot(3,1,1), stem(n,x), grid, title('x[n]')
subplot(3,1,2), impz(b,a), grid, title('h[n]')
subplot(3,1,3), stem(n,y), grid, title('y[n]')
```

Exerciții

Să se determine răspunsul sistemelor definite prin relațiile de mai jos

1. $y[n]=x[n]-1.27x[n-1]+0.81x[n-2]-0.5x[n-3]+0.125x[n-4]$
2. $y[n]+0.9y[n-1]=x[n]$
3. $y[n]+0.13y[n-1]+0.52y[n-2]+0.3y[n-3]=0.16x[n]-0.48x[n-1]+0.48x[n-2]-0.16x[n-3]$
4. $y[n]+0.9y[n-2]=0.3x[n]+0.6x[n-1]+0.3x[n-2]$

la următoarele semnale de intrare:

1. $x_1[n]=\delta[n]$ pentru $0 \le n \le 40$
2. $x_2[n]=\sigma[n]$ pentru $0 \le n \le 40$
3. $x_3[n]=n$ pentru $0 \le n \le 5$