Sisteme de ordinul I şi II

1. Scopul lucrării

Se studiază comportarea în domeniul timp şi frecvență a sistemelor de ordinul II.

Sisteme de ordinul I

2. Comportarea în domeniul timp a sistemelor de ordinul I

Un sistem de ordinul I de tip trece-jos este descris de ecuația diferențială:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \tag{2.1}$$

unde $x(t)$ este intrarea iar $y(t)$ este ieşirea sistemului. τ se numeşte constanta de timp a sistemului. În condiții de repaos inițial ecuația (2.1) descrie un sistem liniar si invariant in timp a cărui funcție de sistem este:

$$H_{TJ}(s) = \frac{1}{1+s\tau}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -\frac{1}{\tau} \tag{2.2}$$

Se obțin:

- răspunsul la impuls:

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \sigma(t) \tag{2.3}$$

- răspunsul indicial (la semnalul treaptă):

$$s(t) = \left[\int_0^t h(\theta) d\theta \right] \sigma(t) = (1 - e^{-t/\tau}) \sigma(t) \tag{2.4}$$

Se observă că, pe durata unei constante de timp, răspunsul la impuls scade de e ori.
Un sistem de ordinul I trece-sus este descris de ecuația diferențială:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \tau \frac{dx(t)}{dt} \tag{2.5}$$

În condiții de repaos inițial, funcția de sistem este:

$$H_{TJ}(s) = \frac{s\tau}{1+s\tau}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -\frac{1}{\tau} \tag{2.6}$$

3. Comportarea în domeniul frecvență a sistemelor de ordinul I

Răspunsul în frecvență al unui sistem de ordinul I trece-jos este:

$$H_{TJ}(\omega) = H_{TJ}(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{1+j\omega\tau} \tag{2.7}$$

iar al unui sistem trece-sus:

$$H_{TS}(\omega) = H_{TS}(s)|_{s=j\omega} = \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau} \tag{2.8}$$

Sisteme de ordinul II

4. Comportarea în domeniul timp a sistemelor de ordinul II trece-jos

Ecuația diferențială ce caracterizează sistemele de ordinul II trece-jos este:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n{}^2 y(t) = \omega_n{}^2 x(t) \tag{2.9}$$

unde $x(t)$ este intrarea iar $y(t)$ este ieşirea sistemului. ω_n se numeşte pulsație naturala, iar ξ se numeşte gradul de amortizare al sistemului.
În condiții de repaos inițial, ecuația (2.9) descrie un sistem liniar si invariant în timp, a cărui funcție de sistem este:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0 \tag{2.10}$$

Polii funcției de sistem sunt dați de rădăcinile ecuației:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \tag{2.11}$$

şi au expresiile:

$$c_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{2.12}$$

$$c_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{2.13}$$

- În cazul $0 < \xi < 1$, polii sunt distincți şi complex conjugați. Se spune ca sistemul este în regim supracritic şi $\sigma_0 = -\xi\omega_\mathrm{n}$.
- În cazul $\xi = 1$, polii sunt reali şi se confundă. Se spune ca sistemul este în regim critic şi $\sigma_0 = -\omega_\mathrm{n}$.
- În cazul $\xi > 1$, polii sunt distincți si reali. Se spune ca sistemul este în regim subcritic şi $\sigma_0 = -\xi\omega_\mathrm{n} + \omega_\mathrm{n}\sqrt{\xi^2 - 1}$.

În ultimele două cazuri sistemul de ordinul II este echivalent cu două sisteme de ordinul I conectate în cascadă. Răspunsul la impuls al sistemului se obține aplicând transformata Laplace inversă funcției (2.10). Dacă $\xi \neq 1$ se obține:

$$h(t) = M\left[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}\right]\sigma(t) \tag{2.14}$$

unde:

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \tag{2.15}$$

Pentru $\xi = 1$ se obține:

$$h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}\sigma(t) \tag{2.16}$$

Pentru $0 < \xi < 1$ relația (2.14) devine:

$$h(t) = \frac{A\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t)\sigma(t) \tag{2.17}$$

Funcțiile $h(t)$ sunt reprezentate în Figura 2.1 pentru diverse valori ale lui ξ.

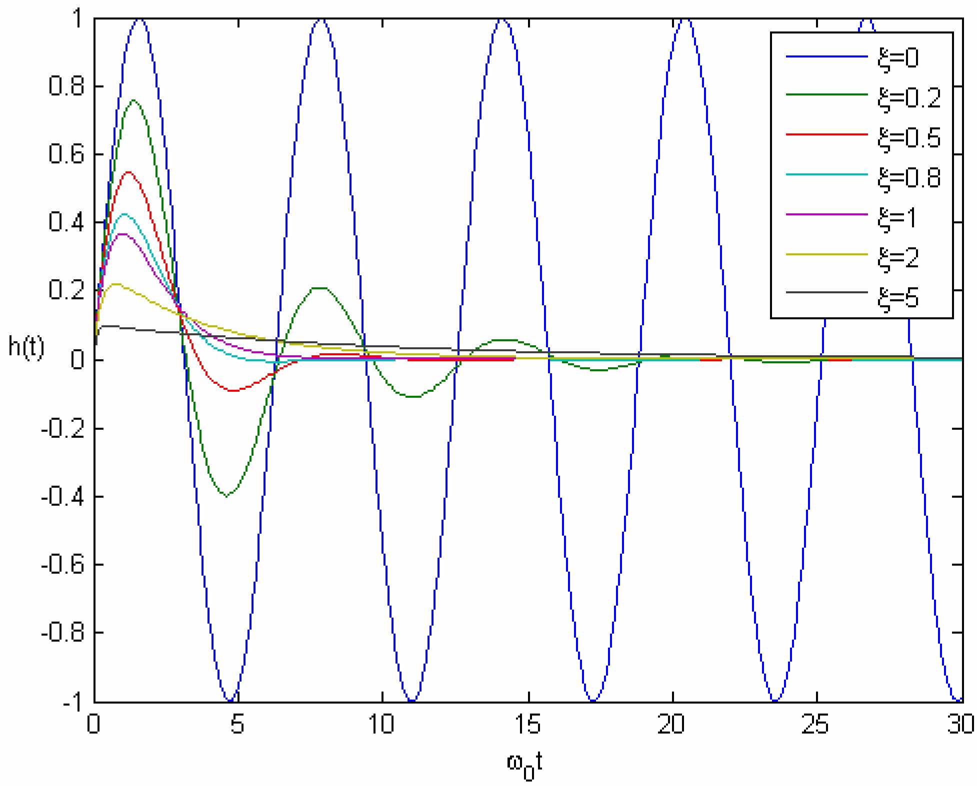


Figura 2.1 Răspunsul la impuls al sistemului de ordinul II trece-jos, pentru diverse valori ale lui ξ.

O caracterizare utilă a unui sistem este dată de răspunsul său la semnalul treaptă (răspuns indicial), notat $s(t)$. Se obține:

$$s(t) = h(t) * \sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau = \left[1 + M \left(\frac{e^{c_1 t}}{c_1} - \frac{e^{c_2 t}}{c_2} \right) \right] \sigma(t) \tag{2.18}$$

dacă $\xi \neq 1$ şi:

$$s(t) = (1 - e^{-\omega_n t} - t e^{-\omega_n t}) \sigma(t) \tag{2.19}$$

dacă $\xi = 1$.

Pentru $0 < \xi < 1$ se obține:

$$s(t) = A \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \arccos \xi) \right] \sigma(t) \tag{2.20}$$

Funcțiile $s(t)$ sunt reprezentate în Figura 2.2 pentru diverse valori ale lui ξ.

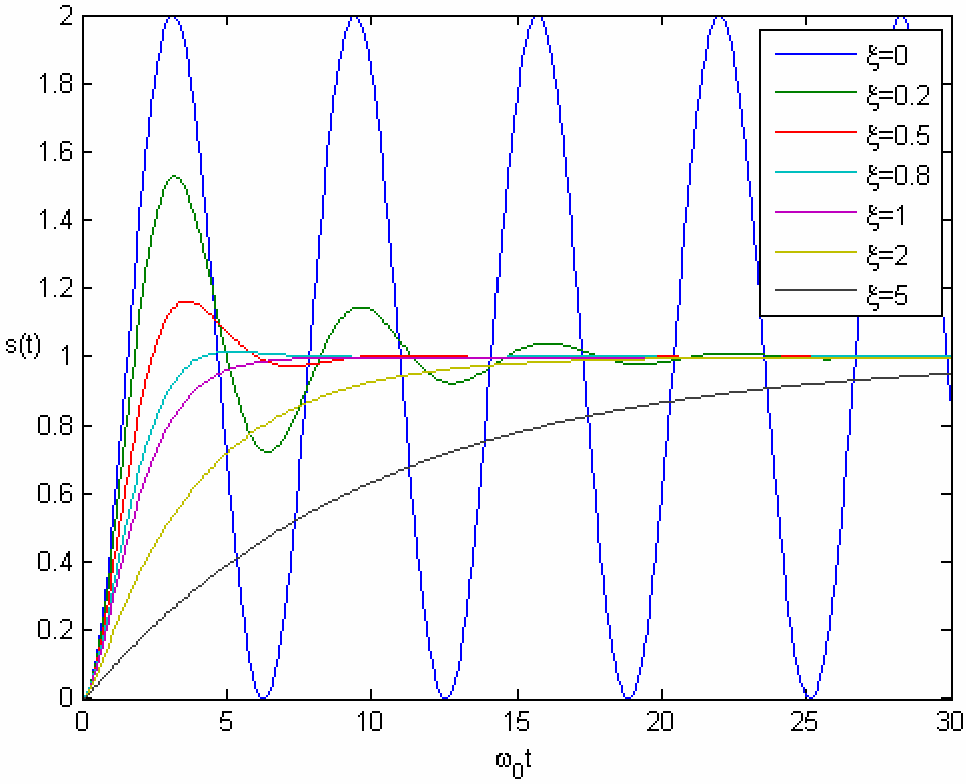


Figura 2.2 Răspunsul indicial al sistemului de ordinul II trece-jos, pentru diverse valori ale lui ξ.

Se observă că, în regim supracritic, răspunsul indicial prezintă supracreşteri şi oscilații iar în regim subcritic timpul sau de răspuns este lung.

5. Comportarea în domeniul frecvență a sistemelor de ordinul II trece-jos

Răspunsul în frecvență al unui sistem de ordinul II trece-jos se obține din (2.10) pentru $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2} \tag{2.21}$$

Diagramele Bode corespunzătoare sunt prezentate în Figura 2.3. Se observă că, în regim supracritic caracteristica de modul are un maxim la pulsația:

$$\omega_{\max} = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \tag{2.22}$$

dacă $\xi < \sqrt{2}/2$.

Pentru $\xi << 1$ se poate considera:

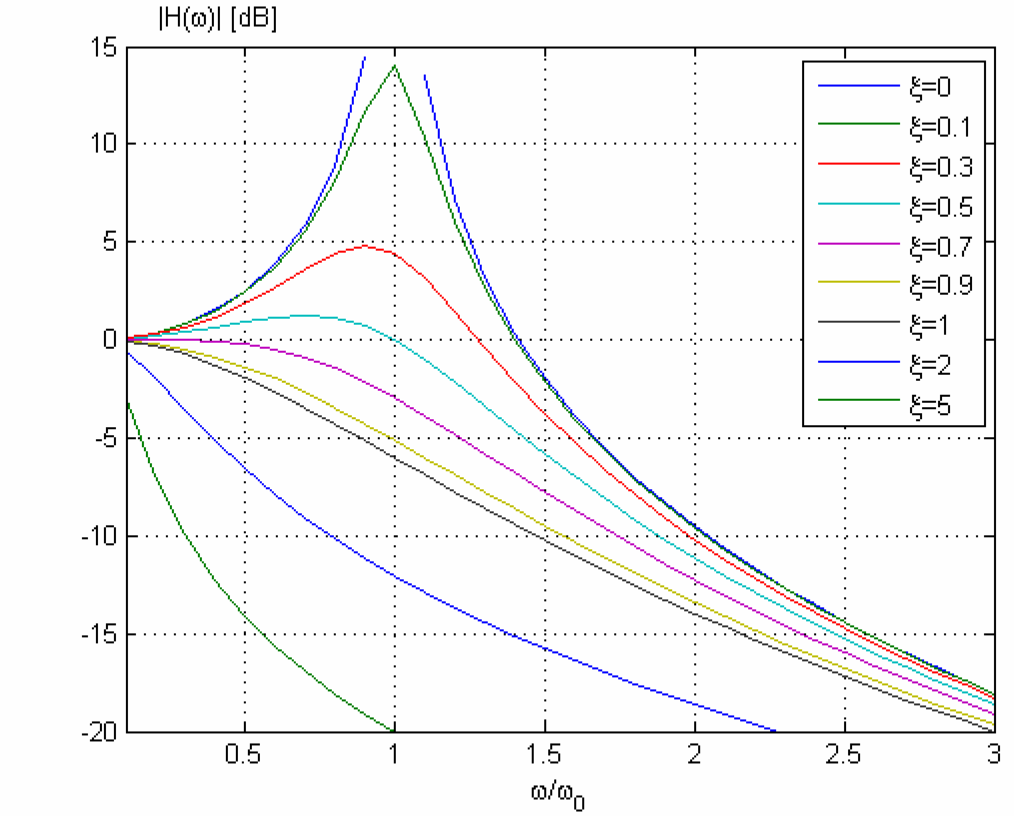
$$\omega_{\max} \cong \omega_n \tag{2.23}$$

Maximul este dat de:

$$|H(\omega_{\max})| = 1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2}) \tag{2.24}$$

Pentru $\xi << 1$ se obține:

$$|H(\omega_{\max})| = \frac{1}{2\xi} \tag{2.25}$$



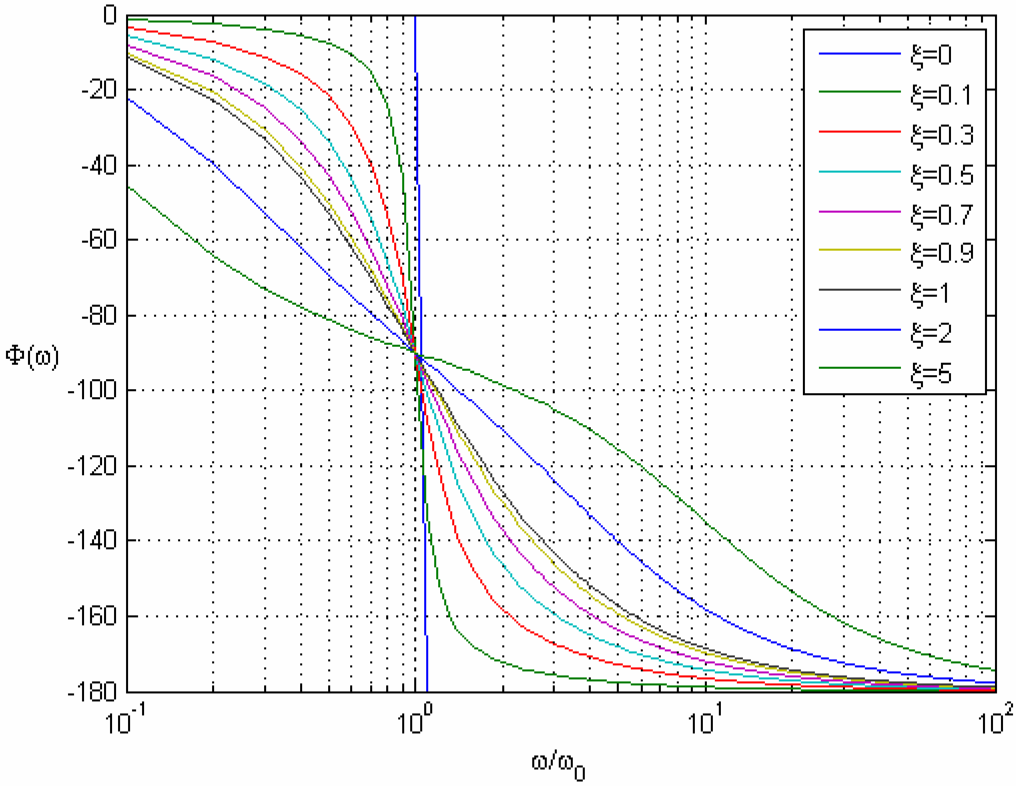


Figura 2.3 Diagramele Bode pentru un sistem de ordinul II trece-jos, pentru diverse valori ale lui ξ.

Dacă

$$20\log|H(\omega_{\max})| \geq 3dB \tag{2.26}$$

atunci sistemul se comportă ca un filtru trece-bandă. Acest lucru se întâmplă pentru:

$$0 < \xi \le \sqrt{\frac{4-\sqrt{8}}{8}} = 0.38 \tag{2.27}$$

În acest caz, banda la 3 dB se poate calcula aproximativ cu relația:

$$B = 2\xi\omega_n \tag{2.28}$$

Se defineşte factorul de calitate al sistemului de ordinul II trece-jos:

$$Q = \frac{1}{2\xi} \tag{2.29}$$

6. Tipuri de sisteme de ordinul II

- trece-jos

$$H_{TJ}(s) = \frac{A_{TJ}\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0 \tag{2.30}$$

- trece-sus

$$H_{TS}(s) = \frac{A_{TS}s^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0 \tag{2.31}$$

- trece-bandă

$$H_{TB}(s) = \frac{A_{TB}s \cdot 2\xi\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0 \tag{2.32}$$

- opreşte-bandă

$$H_{OB}(s) = \frac{A_{OB}(s^2 + \omega_n^2)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0 \tag{2.33}$$

Pentru valorile lui σ_0 vezi comentariile ce urmează relației (2.13)

7. Desfăşurarea lucrării

Vom folosi

- generator de semnal,
- osciloscop
- filtru: trece jos FTJ – led verde; trece banda FTB – led portocaliu; filtru trece sus FTS – led rosu
- sursa de alimentare (±12V) pentru filtru.

Iesirea 50Ω a generatorului de semnal este conectata la intrarea osciloscopului (canalul 1) si la intrarea filtrului. Iesirea filtrului este vizualizata pe canalul 2 al osciloscopului.

7.1 Se determină experimental caracteristicile de frecvență pentru trei tipuri de sisteme de ordinul doi (trece jos, trece sus, trece bandă). Se masoara caracteristica de amplitudine si de faza pentru filtre.

Datele inițiale sunt:

$U_{in} = 1V$, amplitudinea semnalului de la intrare (sau 2V varf-la-varf)

$f_t = 3.4$ kHz , frecvența de tăiere a filtrului

Se completează tabelul de mai jos pentru cele trei tipuri de filtre:

$f\,[kHz]$	0.1	0.4	1.4	2.4	2.9	3.2	3.4	3.6	3.9	4.4	5.4	6.4	7.9	10	20
$U_{out}\,[V]$															
$\Delta T\,[s]$															
$T\,[s]$															
$\varphi[rad]$															

Defazajul se calculeaza folosind regula de trei simpla:

$$\Delta T\,[s] \ldots\ldots.. \ \varphi[rad]$$

$$T\,[s] \ \ldots\ldots\ldots. \ -2\pi$$

$$\varphi[rad] = \frac{-2\pi\Delta T}{T}$$

Valorile $\Delta T\,[s]$ si $T\,[s]$ sunt citite folosind cursorul osciloscopului. La fel si $U_{out}\,[V]$ (Atentie: folositi ΔV_2 pentru ca semnalul de iesire este pe canalul 2!).

7.2 Se reprezintă grafic pe hârtie milimetrică caracteristicile de amplitudine si faza:

$$\frac{U_{out}[V]}{U_{in}[V]} = functie(kf)$$

$$\varphi[rad] = functie(kf)$$

In total: 6 grafice.

8. Exerciții în Matlab

Semnal sinusoidal

Să se reprezinte grafic funcțiile $f(t) = \sin(2\pi 50t)$ şi $g(t) = -f(t)$. Să se scrie titlul „Graficele funcțiilor $f(x)$ şi $g(x)$”, pe axa x se scrie „t”, iar pe axa y să se scrie $f(t)$ şi $g(t)$.

```
t=0:.001:0.02
f=sin(2*pi*50*t)
g=-f
plot(t,f,t,g,'g'),grid on
title('Graficele functiilor f(t) si g(t)')
xlabel('t'), ylabel('f(t) si g(t)')
```

Exercițiu

Să se reprezinte grafic funcția discretă: $x(n) = \sin\left(2\pi \frac{1}{10} n\right)$, pentru $n \in [0, 20]$. Graficul să fie de culoare roşie. Să se scrie titlul şi identificările axelor. Rprezentarea se face cu comanda *stem*.

Convoluția semnalelor

Să se calculeze convoluția liniară între secvențele: $x[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]$ şi $h[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]$. Se defineşte convoluția lor liniară prin: $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$.

```
x=[1 1 1]; h=[1 1 1 1]
disp('Rezultatul convolutiei este:')
y=conv(x,h)
stem(y)
```

Să se calculeze şi să se reprezinte grafic produsul de convoluție liniară a secvențelor:

$x[n]=\sigma[n]-\sigma[n-5]$, pentru $0\le n\le 10$

$h[n]=(0,9)^n$, pentru $0\le n\le 20$

```
x=[ones(1,5),zeros(1,6)];
n=0:20;
h=0.9.^n;
y=conv(x,h);
subplot(2,2,1),stem(0:10,x),title('x'),grid
subplot(2,2,2),stem(n,h),title('h'),grid
subplot(2,1,2),stem(0:length(y)-1,y),title('y'),grid
```

Exerciții

1. Se dau secvențele:

$$x[n]=\begin{cases}1, & \text{daca n=0,1,2,3,4,5}\\ 0, & \text{in rest}\end{cases}$$

$$h[n]=\begin{cases}\text{n+1}, & \text{daca n=0,1,2}\\ 0, & \text{in rest}\end{cases}$$

Calculați analitic $y[n]=x[n]*h[n]$, folosind funcția *conv*, şi reprezentați grafic rezultatul obținut.

2. Se dau secvențele:

$$x[n]=\begin{cases}1, & \text{daca n=0,1,2}\\ 0, & \text{in rest}\end{cases}$$

$$h[n]=\begin{cases}\text{5-n}, & \text{daca n=0,1,2,3,4}\\ 0, & \text{in rest}\end{cases}$$

Calculați analitic $y[n]=x[n]*h[n]$, folosind funcția *conv*, şi reprezentați grafic rezultatul obținut.

Semnale periodice

În MATLAB nu se pot genera secvențe de lungime infinită astfel încât trebuie precizat numărul de perioade pentru o anumită secvență.

1. $x_1[n]=n$ pentru $0\le n\le 5$ (3 periode)

```
n=0:5;
x1=n;
figure(1)
stem(n,x1),grid
x11=[x1,x1,x1];
figure(2)
```

```
stem(0:(length(x11)-1),x11),grid
```

Exerciții
Să se definească şi să se reprezinte grafic următoarele secvențe:

1. $x_2[n]=\sigma[n-2]-\sigma[n-4]$ pentru $0\le n\le 5$ (5 periode)

2. $x_3[n]=\delta[n-1]-\delta[n-3]$ pentru $0\le n\le 5$ (7 periode)

Semnale complexe
1. Să se definească secvența complexă:

$x_1[n]=e^{jn\frac{\pi}{5}}$ pentru $-20\le n\le 20$

Să se reprezinte partea pară respectiv impară pentru această secvență.

```
n=-20:20;
x1=exp(j*n*pi/5);
subplot(2,1,1),stem(n,real(x1)),title('Real')
subplot(2,1,2),stem(n,imag(x1)),title('Imaginar')
```

Exercițiu
Să se definească secvența complexă:

1. $x_2[n]=3n-j(n-1)^2$ pentru $-20\le n\le 20$

Să se reprezinte partea pară respectiv impară pentru această secvență.

Explicați rezultatul obținut în urma comenzilor:

```
plot(x1)
plot(x2)
```