Studiul semnalelor periodice

1. Scopul lucrării

Se efectuează analiza în frecvență a semnalelor periodice şi se măsoară distorsiunile semnalelor de la ieşirea generatoarelor de semnale sinusoidale.

2. Dezvoltarea în serie Fourier exponențială a semnalelor periodice complexe

Un semnal în timp continuu $x : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ se numeste periodic daca exista o constanta strict pozitiva T astfel incat:

$$x(t+T) = x(t), \quad \forall t \in \mathrm{R} \tag{1}$$

Se numeste perioada a semnalului cea mai mica valoare a lui T care satisface egalitatea de mai sus.

Are loc urmatoarea proprietate: daca o functie $x(t)$ este local integrabila si periodica de perioada T, atunci:

$$\int_0^T x(t)\,dt = \int_a^{a+T} x(t)\,dt, \quad \forall a \in \mathrm{R} \tag{2}$$

Deoarece integrala pe o perioada a functiei nu depinde de pozitia intervalului de integrare, de lungime egala cu perioada, pe axa timpului, aceasta marime se noteaza scurt cu:

$$\int_T x(t)dt$$

Se spune ca un semnal periodic, de perioada T, satisface conditiile lui Dirichlet daca:

- $x(t)$ este absolut integrabil pe o perioada:

$$\int_T |x(t)|dt < \infty$$

- $x(t)$ are intr-o perioada T un numar finit de maxime si minime.
- $x(t)$ are intr-o perioada T un numar finit de puncte de discontinuitate, iar acestea sunt de speta I-a.

Daca un semnal periodic, de perioada T, satisface conditiile lui Dirichlet, atunci admite dezvoltarea in serie Fourier exponentiala:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{3}$$

cu

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t}\,dt \tag{4}$$

unde c_k reprezinta coeficientii seriei Fourier exponentiale.

3. Dezvoltarile in serie Fourier trigonometrica si in serie Fourier armonica ale semnalelor periodice reale

Se considera semnalele periodice $x : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$, de perioada T, care satisfac conditiile lui Dirichlet; atunci ecuatia (3) se poate pune sub una din urmatoarele forme:

- seria Fourier trigonometrica

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos k\omega_0 t + b_k \cdot \sin k\omega_0 t\right) \tag{5}$$

- seria Fourier armonica

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos\left(k\omega_0 t + \varphi_k\right) \tag{6}$$

Relatiile intre coeficientii seriilor din (3), (5) si (6) sunt:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 = A_0 \\ a_k &= A_k \cdot \cos\varphi_k = 2|c_k| \cdot \cos(\arg\{c_k\}), \quad k > 0 \\ b_k &= -A_k \cdot \sin\varphi_k = -2|c_k| \cdot \sin(\arg\{c_k\}), \quad k > 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Cu referire la relatia (6):

- marimea A_0 se numeste componenta continua a semnalului $x(t)$
- semnalul $A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$ se numeste armonica de ordinul k a semnalului $x(t)$, $k > 0$
- marimile $\frac{A_k}{\sqrt{2}}$ se numesc valorile efective ale armonicilor ($k > 0$)
- se numeste **spectru de amplitudini** reprezentarea numerelor A_k functie de $k\omega_0, \quad k \geq 0$
- se numeste **spectru de faze** reprezentarea marimilor φ_k functie de $k\omega_0, \quad k \geq 0$.

4. Puterea semnalelor periodice

Se considera un semnal oarecare $x(t)$. Daca exista marimea:

$$P_X = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt$$

aceasta se numeste puterea semnalului $x(t)$.

Se poate arata ca, daca $x(t)$ este un semnal periodic, de perioada T, atunci:

$$P_X = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt \tag{8}$$

Au loc urmatoarele relatii Parseval:

$$P_X = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_k}{\sqrt{2}} \right)^2 \tag{9}$$

Prima egalitate are loc pentru orice semnal periodic, in timp ce a doua are loc doar pentru semnale reale. Deoarece puterea unei sinusoide este egala cu patratul valorii sale efective, rezulta ca puterea unui semnal periodic real este suma dintre puterea componentei continue si puterile semnalelor sinusoidale care apar in dezvoltarea sa in serie Fourier armonica.

5. Relatia intre coeficientii Fourier asociati unui semnal periodic si transformarea Fourier asociata restrictiei acestui semnal la o perioada

Fie $x(t)$ un semnal periodic, cu perioada T si $x_1(t)$ semnalul:

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), & t \in \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2} \right] \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \tag{10}$$

Fie $X_1(\omega)$ transformata Fourier a semnalului $x_1(t)$ si c_k coeficientii seriei Fourier exponentiale asociati semnalului $x(t)$. Atunci:

$$c_k = \frac{1}{T} X_1(k\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \; k \in Z \tag{11}$$

6. Exemplu

Se considera semnalul periodic din figura 1.

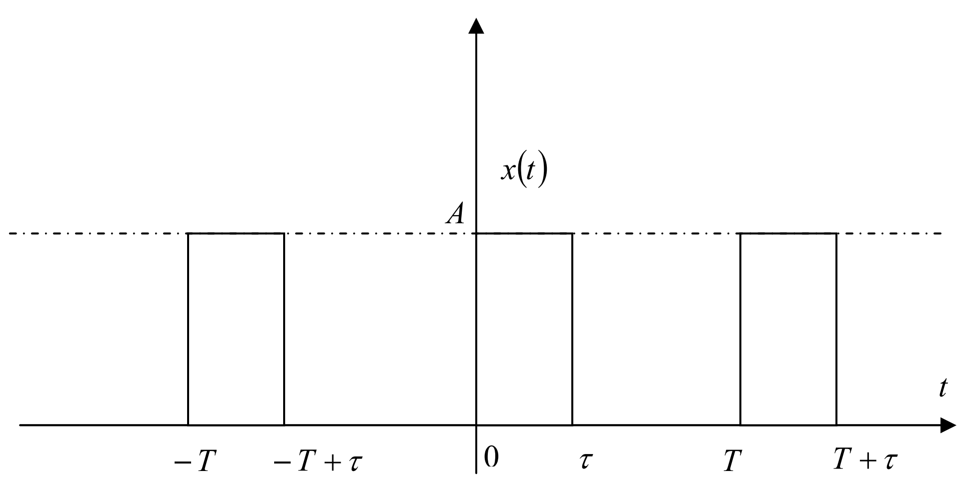

Fig.1 Semnal dreptunghiular, $\tau / T = 1/4$.

Coeficientii seriei Fourier exponentiale sunt:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^{\tau} A\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt = A\frac{\sin k\omega_0\tau/2}{k\pi}\cdot e^{-jk\omega_0\tau/2} \tag{12}$$

iar puterea:

$$P_X = \frac{1}{T}A^2\cdot\tau \tag{12`}$$

Avand in vedere (7) rezulta:

$$\begin{aligned} A_0 &= c_0 = A\frac{\tau}{T} \\ A_k &= 2|c_k| = 2A\left|\frac{\sin k\omega_0\tau/2}{k\pi}\right| \\ \varphi_k &= \arg\{c_k\} = -\frac{k\omega_0\tau}{2} + \left[1-\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{k\omega_0\tau}{2}\right)\right]\cdot\frac{\pi}{2}, \quad k>0 \end{aligned} \tag{13}$$

Spectrele de amplitudini si de faze sunt prezentate in figura 2 pentru cazul $\tau/T = 1/4$.

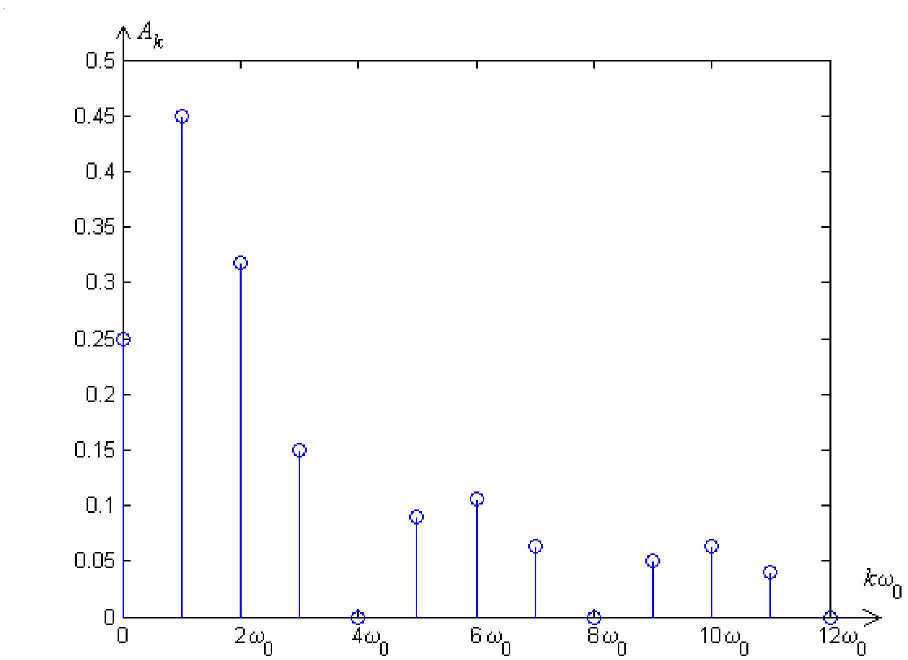

Fig 2a) Spectru de amplitudini pentru semnal dreptunghiular, $\tau/T = 1/4$.

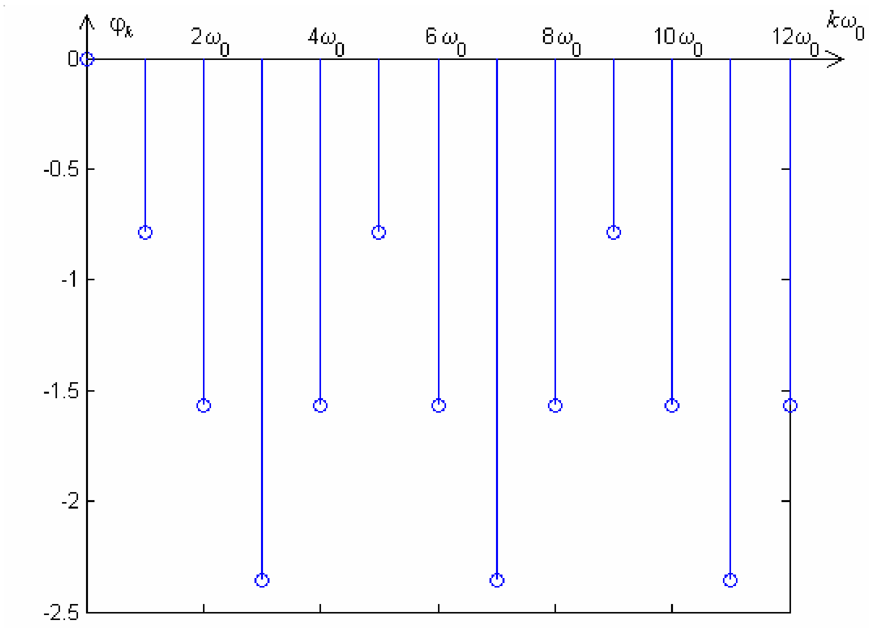

Fig 2b) Spectru de faze pentru semnal dreptunghiular, $\tau / T = 1/4$.

7. Distorsiunile semnalelor

Daca un semnal sinusoidal este aplicat la intrarea unui SLITC, atunci la iesire semnalul este sinusoidal.
In realitate, la iesire, semnalul este doar aproximativ sinusoidal, datorita neliniaritatilor inerente circuitelor reale. Fie:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \psi) \tag{14}$$

semnalul de la intrare si

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \tag{15}$$

semnalul de iesire. Se defineste factorul de distorsiuni:

$$d_Y = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{A_k}{\sqrt{2}} \right)^2}}{A_1 / \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} P_k}}{\sqrt{P_1}} \tag{16}$$

Factorul de distorsiuni este radical din raportul dintre puterea continuta in armonicele superioare si puterea utila continuta in fundamentala semnalului.

8. Desfasurarea lucrarii

Se foloseste un generator de semnal, un osciloscop si un analizor de spectru. Generatorul de semnal genereaza semnal periodic de forma sinusoidala, dreptunghiular, triunghiular. Se aduce iesirea 50Ω a generatorului la intrarea osciloscopului (canalul 1) si la intrarea analizorului spectral.

8.1. Se vizualizeaza si se deseneaza pe hartie milimetrica formele de unda ale unor semnale periodice generate de un generator de functii (dreptunghiular, sinusoidal, triunghiular). Semnalele sunt vizualizate in timp pe osciloscop si in domeniul frecventa folosind analizorul spectral.

Generator de semnal:

- frecventa fundamentala f_0=1 MHz
- amplitudine varf la varf A_{pp}=1 V
- pentru semnalul dreptunghiular: factorul de umplere 0.5

Osciloscop:

- Scara de amplitudine 0.5 V/div; Scara de timp 0.5 μs/div

Analizor spectral:

Center frequency: 5 MHz; Reference level: 10 dBm
Span width: 1 MHz/div; RBW: 200 kHz

8.2 Sa se calculeze coeficientii Fourier pentru seria armonica A_k[V] in cazul

Semnalului sinusoidal $x(t) = 0.5V \cdot \sin \omega_0 t$ (folositi identificarea),

Semnalului dreptunghiular cu factor de umplere 0.5 (folositi exemplul din fig. 1),

Semnalului triunghiular.

Obs. Semnalului triunghiular poate fi scris:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) = \frac{8}{\pi^2}\left(\sin \omega_0 t - \frac{1}{3^2}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5^2}\sin 5\omega_0 t - \frac{1}{7^2}\sin 7\omega_0 t + ...\right)$$

8.3 Se masoara valorile efective ale armonicilor semnalelor de la punctul 8.1 cu un analizor de spectru.

Tab. I. Semnal sinusoidal

F	U_{ef} [dBm]	U_{ef}[mV]	U[mV]	A_k[mV]
f_0				
$2f_0$				
$3f_0$				
$4f_0$				
$5f_0$				

Tab. II. Semnal dreptunghiular, factor de umplere 0.5. Vom ignora armonicile de ordin par, ar trebui sa fie foarte mici (aproape de zero).

f	U_{ef} [dBm]	U_{ef}[mV]	U[mV]	A_k[mV]
f_0				
$3f_0$				
$5f_0$				
$7f_0$				
$9f_0$				

Tab. III. Semnal triunghiular

f	U_{ef} [dBm]	U_{ef}[mV]	U[mV]	A_k[mV]
f_0				

$2f_0$				
$3f_0$				
$4f_0$				
$5f_0$				

Se va folosi:

$$20\lg\frac{U_{ef}\left[\mathrm{V}\right]}{U_{ref}}=U_{ef}\left[\mathrm{dBm}\right]$$

Nivelul de referinta este $U_{ref}=223.6\mathrm{mV}$.

$$U_{ef}\left[\mathrm{V}\right]=\frac{U\left[V\right]}{\sqrt{2}}$$

8.4 Se reprezinta pe hartie milimetrica spectrele de amplitudini masurate si calculate. Se compara valorile corespunzatoare.
8.5 Calculati factorul de distorsiuni al semnalului sinusoidal considerand valorile efective din Tab.I si relatia (16).

9. Prezentarea mediului Matlab

MATLAB (MATrix LABoratory) este un program interactiv, dezvoltat de firma Math Works Inc., fiind destinat, în special, prelucrării numerice a datelor furnizate sub formă vectorială sau matriceală.
MATLAB integrează calculul numeric cu vizualizarea rezultatelor şi programarea, într-un mediu flexibil şi deschis dezvoltărilor ulterioare.
MATLAB este un sistem interactiv, al cărui element de bază este o matrice care nu necesită o dimensionare explicită. Aceasta ajută în rezolvarea a numeroase probleme de calcul tehnic, în special pentru cele bazate pe formalismul matricial (şi vectorial), permiţând scrierea programelor într-un limbaj scalar.
MATLAB-ul a evoluat în ultimul timp, mai ales prin utilizarea sa în mediul universitar, ca instrument educaţional pentru cursuri de matematică, inginerie şi ştiinţă. În egală măsură, MATLAB-ul se dovedeşte deosebit de eficient în cercetarea ştiinţifică şi dezvoltarea tehnologică în mediul industrial.

Moduri de lucru în MATLAB

Lansarea în execuţie a programului MATLAB se face din WINDOWS.
După lansarea în execuţie, programul MATLAB intră în “modul de comandă”, afişând prompterul „ >> ” şi aşteptând introducerea unei comenzi de către utilizator. Executarea unei comenzi este urmată, de obicei, fie de crearea unei variabile în spaţiul de lucru, fie de afişarea unui mesaj sau desenarea unui grafic. De exemplu, comanda:

```
>>v=0:10
```

va crea variabila *v* şi va afişa elementele acesteia pe ecran.

În afara modului de lucru “în linie de comandă”, în MATLAB se pot crea fişiere ce conțin instrucțiuni MATLAB, numite fişiere-M (deoarece au extensia “.m”). Un program MATLAB poate fi scris sub forma fişierelor *“script”* sau a fişierelor *“function”*. Ambele tipuri de fişiere sunt scrise în format ASCII, iar algoritmul care a fost implementat poate fi urmărit cu foarte mare uşurință, dacă se cunosc convențiile şi sintaxa MATLAB. Aceste tipuri de fişiere, obligatoriu cu extensia “.m”, permit crearea unor funcții noi care le pot completa pe cele deja existente. Prin această facilitate, MATLAB-ul poate fi extins la aplicații specifice utilizatorului, care are posibilitatea să scrie noi proceduri.

Fişiere “script”

Un fişier *“script”* este un fişier care conține o secvență de comenzi MATLAB. Prin apelarea numelului fişierului, se execută secvența MATLAB conținută în acesta. După execuția completă a unui fişier script, variabilele cu care acesta a operat rămân în zona de memorie a aplicației. Aceste fişiere nu permit integrarea în programe mari, realizate pe principiul modularizării. Fişierele script sunt folosite pentru rezolvarea unor probleme care cer comenzi succesive atât de lungi, încât ar putea deveni greoaie pentru lucrul în mod iterativ, adică în modul de lucru linie de comandă.

Fişiere “funcție”

Dacă prima linie a fişierului-M conține cuvântul *"function"*, fişierul respectiv este declarat ca fişier funcție. O funcție diferă de un fişier *"script"* prin faptul că poate lucra cu argumente. Variabilele definite şi manipulate în interiorul fişierului funcție sunt localizate la nivelul acestuia. Prin urmare, la terminarea execuției unei funcții, în memoria calculatorului nu rămân decât variabilele de ieşire ale acesteia.

Fişierele funcție sunt utilizate pentru extinderea MATLAB-ului, adică pentru crearea unor noi funcții MATLAB. Forma generală a primei linii a unui fişier funcție este:

function [param_ieşire] = nume_funcție (param_intrare)

unde:

function - este cuvânt cheie care declară fişierul ca fişier funcție (obligatoriu);

nume_funcție - numele funcției, adică numele sub care se salvează fişierul, fără extensie. Nu poate fi identic cu cel al unui fişier-M preexistent.

param_ieşire - parametri de ieşire trebuie separați cu virgulă şi cuprinşi între paranteze drepte. Dacă funcția nu are parametri de ieşire, parantezele drepte şi semnul egal nu mai au sens.

param_intrare - parametri de intrare trebuie separați cu virgulă şi cuprinşi între paranteze rotunde. Dacă funcția nu are parametri de intrare, parantezele rotunde nu mai au sens.

Semnale elementare

Impulsul unitate

Impulsul unitate se defineşte în felul următor:

$$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

Utilizând proprietatea de deplasare în timp, putem scrie:

$$\delta[n-n_0]=\begin{cases}1, & n=n_0\\ 0, & n\neq n_0\end{cases}$$

În MATLAB nu putem defini secvențe de lungime infinită, trebuie precizat domeniul de valori pentru n.

Să se definească şi să se reprezinte grafic secvențele:

1. $x_1[n]=\delta[n]$
2. $x_2[n]=\delta[n-1]$
3. $x_3[n]=\delta[n+1]$ pentru $-10\leq n\leq 10$.

Toți vectorii vor avea, deci 21 de elemente.

x1.

```
% Generarea impulsului unitate
clf; % sterge vechiul grafic
n = -10:10; % generarea unui vector de la -10 la 10
d = [zeros(1,10) 1 zeros(1,10)]; % generarea impulsului
stem(n,d); % reprezentarea grafică în timp discret
xlabel('n');ylabel('Amplitudine');
title('Impulsul unitate');
axis([-10 10 0 1.2]);
```

x2.

```
n=-10:10;
x2=zeros(size(n));
x2(12)=1;
stem(n,x2),grid,title('x2[n]'),xlabel('n')
```

Momentul de timp *n* =1 corespunde celui de al 12-lea element al vectorului.

x3.

```
n=-10:10;
x3=zeros(size(n));
x3(10)=1;
stem(n,x3),grid,title('x3[n]'),xlabel('n')
```

Momentul de timp *n* = -1 corespunde celui de al 10-lea element al vectorului.

Exerciții

Să se definească şi să se reprezinte graphic următoarele secvențe:

1. $x_1[n] = 0.7\delta[n-5]$ pentru $1 \le n \le 20$
2. $x_1[n] = 0.6\delta[n]$ pentru $-15 \le n \le 15$

Treapta unitate
Treapta unitate se defineşte în felul următor:

$$\sigma[n] = \begin{cases} 1, & n \ge 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Utilizând proprietatea de deplasare în timp, putem scrie:

$$\sigma[n-n_0] = \begin{cases} 1, & n \ge n_0 \\ 0, & n < n_0 \end{cases}$$

În MATLAB nu putem defini secvențe de lungime infinită, trebuie precizat domeniul de valori pentru n.

Să se definească şi să se reprezinte grafic secvențele:
1. $x_1[n] = \sigma[n]$ pentru $-10 \le n \le 10$.
2. $x_2[n] = \sigma[n-2]$ pentru $-5 \le n \le 10$.
3. $x_3[n] = \sigma[n+2]$ pentru $-5 \le n \le 10$.

x1.
```
% Generarea treptei unitate
n = -10:10; % generarea unui vector de la -10 la 10
u = [zeros(1,10) ones(1,11)]; % generarea treptei unitate
stem(n,u); % reprezentarea grafica in timp discret
xlabel('n');ylabel('Amplitudine');
title('Treapta unitate');
axis([-10 10 0 1.2]);
```
x2.
```
n=-5:10;
x2=[zeros(1,7),ones(1,9)];
stem(n,x2),grid,title('x_2[n]'),xlabel('n')
```
Momentul de timp $n = 2$ corespunde celui de al 8-lea element al vectorului.

x3.
```
n=-5:10;
x3=[zeros(1,3),ones(1,13)];
stem(n,x3),grid,title('x_3[n]'),xlabel('n')
```
Momentul de timp $n = -2$ corespunde celui de al 4-lea element al vectorului.

Exerciții
Să se definească şi să se reprezinte grafic următoarele secvențe:
1. $x_1[n] = 0.7\sigma[n]$ pentru $-10 \le n \le 20$
2. $x_2[n] = \sigma[n-7]$ pentru $0 \le n \le 30$
3. $x_3[n] = 1.8\sigma[n+3]$ pentru $-15 \le n \le 15$