

6 Analiza Fourier a semnalelor definite in timp discret

- 1-Seria Fourier pentru semnale periodice in timp discret
- 2-Transformata Fourier in timp discret pentru semnale aperiodice

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Cap6.pdf>

1

Raspunsul sistemelor discrete, liniare si invariante in timp SLITD la exponentiala complexa de modul unitar

$$\begin{array}{ccc}
 e^{j\Omega_0 n} & \xrightarrow{\quad} & \boxed{H(\Omega)} \xrightarrow{\quad} e^{j\Omega_0 n} \cdot H(\Omega_0) \\
 \text{Functie proprie pentru} & & \text{Valoare proprie} \\
 \text{orice SLITD} & & \\
 & & H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot e^{-j\Omega k}
 \end{array}$$

- Demonstratie:

$$y[n] = h[n] * e^{j\Omega_0 n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot e^{j\Omega_0(n-k)} = e^{j\Omega_0 n} \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot e^{-j\Omega_0 k} \right)$$

Cu notatia: $H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot e^{-j\Omega k} \Rightarrow y[n] = e^{j\Omega_0 n} \cdot H(\Omega_0) = |H(\Omega_0)| \cdot e^{j[\Omega_0 n + \Phi(\Omega_0)]}$

- La iesire se obtine tot o exponentiala complexa, de aceeași frecvență ca și semnalul de intrare, Ω_0 , dar de modul și fază inițială afectate de $|H(\Omega_0)|$ și $\arg\{H(\Omega_0)\}$.

2

Fie un semnal de intrare $x[n]$ ce apare ca o combinatie liniara a unor exponentiale complexe de forma $\Phi_k[n]=\exp(j\Omega_k n)$,

Se observa ca raspunsul este o combinatie liniara a raspunsurilor partiale, $H(\Omega_k) \Phi_k[n]$

$$\sum_k a_k e^{j\Omega_k n} \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow \sum_k a_k H(\Omega_k) e^{j\Omega_k n}$$

\Rightarrow Daca semnalul de intrare se poate pune sub forma unei sume de exponentiale discrete, este suficienta cunoasterea functiei $H(\Omega)$, pentru a determina raspunsul $y[n]$

3

Seria Fourier in timp discret pentru semnale discrete si periodice

Fie un semnal periodic, $x[n]$ de perioada N , pentru care $x[n+N]=x[n], \forall n \in \mathbb{Z}$. Intr-o perioada exista N valori $\{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}$, dupa care ele se repeta: $x[0]=x[N], x[N+1]=x[1] \dots$ etc. Se scrie ca:

$$x[n]=x[(n)_N]$$

$(n)_N$ - reprezentarea lui n in clase de resturi modulo N

$$(7)_8=7 \text{ pentru ca } 7=0 \cdot 8+7$$

$$(15)_8=7 \text{ pentru ca } 15=1 \cdot 8+7$$

Pentru $n < 0$, restul $(n)_N$ trebuie sa fie pozitiv:

$$(-15)_8=1 \text{ pentru ca } -15=-2 \cdot 8+1$$

4

Spatiul semnalelor discrete si periodice, de perioada N , este N dimensional, deci bazele sunt N -dimensionale. Un exemplu de baza ortogonala este

$$\left\{ \Phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \mid k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq N-1 \right\}; \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}; \langle \Phi_k[n], \Phi_l[n] \rangle = \begin{cases} N, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

Pentru un semnal periodic, $x[n]$, de perioada N , de energie finita, exista o descompunere unica, cu coeficientii c_k unic determinati

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \longleftrightarrow c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-jk\Omega_0 n}$$

Aceasta este o pereche Fourier. **Seria Fourier exponentiala**: sinteza semnalului $x[n]$ ca o suma ponderata de N exponentiale complexe discrete. Secventa de coeficienti Fourier este si ea periodica de aceeasi perioada N

$$c_{k+N} = c_k, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

5

- In insumare indicii trebuie sa ia valori consecutive, dar nu neaparat $0, \dots, N-1$. Notatie $\langle N \rangle$
- Periodicitatea seriei Fourier se verifica usor:

$$c_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \cdot e^{-j2\pi n}$$

$$\text{Dar } e^{-j2\pi n} = 1 \text{ si } c_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = c_k, \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

$$\Rightarrow c_{k+N} = c_k \text{ sau } c_k = c_{(k)_N}$$

6

Exemple

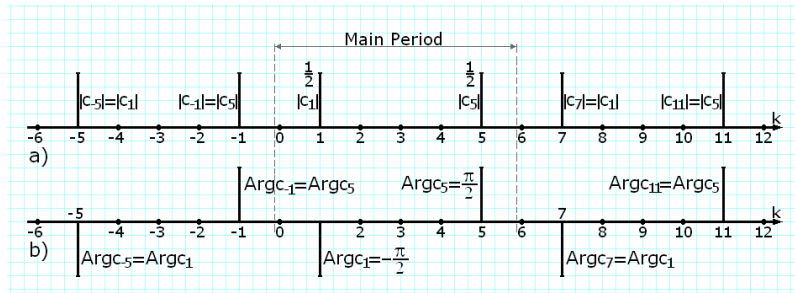
1. **Semnalul sinusoidal** $x[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ are perioada N. Folosind relatia lui Euler:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) = \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j} e^{-j(N-1)\frac{2\pi}{N}n}$$

Prin identificare:

$$c_1 = \frac{1}{2j}, c_{N-1} = -\frac{1}{2j}; \text{ in rest coeficientii sunt nuli: } c_0 = c_2 = \dots = c_{N-2} = 0.$$

Diagrame spectrale de modul si de faze pentru N=6 $\sin(2\pi n/6)$



7

2. $x[n] = 1 + \sin(2\pi n/N) + 4\cos(2\pi n/N) + \cos(4\pi n/N + \pi/2)$

Relatia lui Euler:

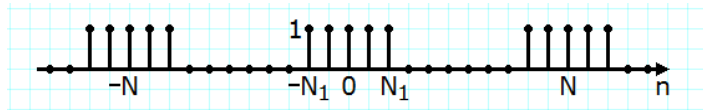
$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j} e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n} \\ &\quad + 2e^{j\frac{2\pi}{N}n} + 2e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n} \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j2\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j(N-2)\frac{2\pi}{N}n} \end{aligned}$$

Identificare:

$$c_0 = 1; c_1 = 2 + \frac{1}{2j}; c_2 = \frac{j}{2}; c_{N-2} = -\frac{j}{2} \quad c_{N-1} = 2 - \frac{1}{2j}$$

8

3. Semnalul dreptunghiular, de perioada N . Intr-o perioada sunt $2N_1+1$ valori succesive egale cu 1.



$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \sum_{n=0}^{2N_1} \left(e^{-jk\frac{2\pi}{N}} \right)^n ; 0 \leq k \leq N-1$$

Pentru $k=0$:
$$c_0 = \frac{2N_1+1}{N}$$

$$1 \leq k \leq N-1$$

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left(k \frac{2\pi}{N} \frac{2N_1+1}{2}\right)}{\sin k \frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left[(2N_1+1) \frac{\Omega}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \Bigg|_{\Omega = k \frac{2\pi}{N}}$$

9

•**Semnale in timp continuu**: trunchierea seriei duce la aparitia unor oscilatii la trecerea brusca a semnalului de la o valoare la alta. Mariind numarul de termeni din serie, amplitudinea oscilatiilor nu se modifica, dar ele devin mai rapide (fenomenul Gibbs)

•**Semnale in timp discret**: trunchierea **nu** duce la aparitia unui fenomen de tip Gibbs. Se face o aproximare a semnalului; cu cat numarul de termeni e mai mare, cu atat aceasta este mai buna. Cand se insumeaza toti cei N termeni, semnalul este chiar $x[n]$, **fara nici o eroare**.

•Fie $N = 9$ si $2N_1+1 = 5$. Coeficientii Fourier sunt:

$$c_0 = 0,556 ,$$

$$c_1 = c_8 = 0,32 ,$$

$$c_2 = c_7 = -0,059 ,$$

$$c_3 = c_6 = -0,111 ,$$

$$c_4 = c_5 = 0,073 .$$

10

Semnalul trunchiat cu $2M+1$ termeni din seria sa Fourier:

$$x_M[n] = \sum_{k=-M}^M c_k e^{-jk\frac{2\pi}{9}n}$$

Pentru $M=1, 2, 3$ si 4 avem aproximariile:

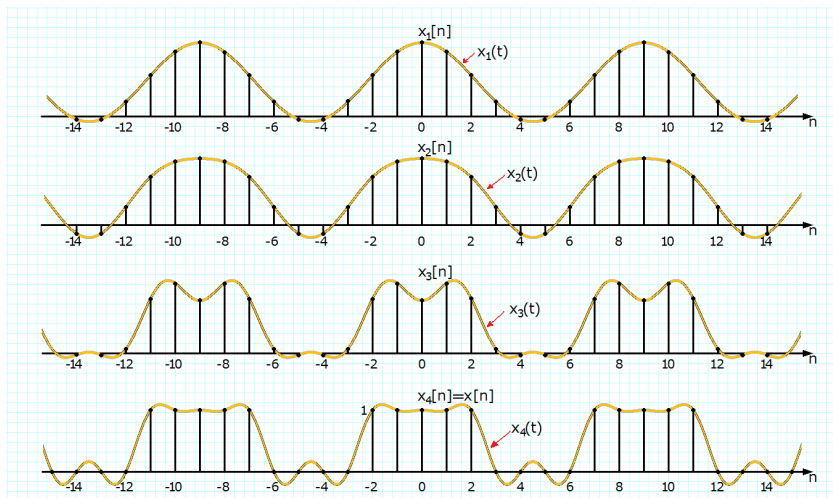
$$x_1[n] = 0.556 + 0.64 \cos \frac{2\pi n}{9}$$

$$x_2[n] = 0.556 + 0.64 \cos \frac{2\pi n}{9} - 0.118 \cos \frac{4\pi n}{9}$$

$$x_3[n] = 0.556 + 0.64 \cos \frac{2\pi n}{9} - 0.118 \cos \frac{4\pi n}{9} - 0.222 \cos \frac{6\pi n}{9}$$

$$x_4[n] = 0.556 + 0.64 \cos \frac{2\pi n}{9} - 0.118 \cos \frac{4\pi n}{9} - 0.222 \cos \frac{6\pi n}{9} + 0.146 \cos \frac{8\pi n}{9}$$

11



Trunchierea seriei de reconstructie pentru semnalul dreptunghiular.

Nu apare o comportare asemanatoare fenomenului Gibbs:

$$x_4[n] = x[n]$$

12

Proprietatile seriei Fourier in timp discret

1. Liniaritatea. $x[n]$, $y[n]$ periodice de aceeasi perioada

$$ax[n] + by[n] \longleftrightarrow \{ac_k^x + bc_k^y\}$$

Tema: demonstratia

2. Deplasarea (translatarea) in timp

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow \left\{ e^{-jk \frac{2\pi}{N} n_0} c_k \right\}$$

Spectrul de modul nu este afectat, in schimb este afectat cel de faza.

Operatii duale: deplasarea si modulatia (inmultirea cu o exponentiala complexa)

13

3. Conjugarea complexa

$$x^*[n] \longleftrightarrow \{c_{-k}^*\} = \left\{ c_{(-k)_N}^* \right\}$$

4. Reflectarea semnalului

$$x[-n] \longleftrightarrow \{c_{-k}\} = \left\{ c_{(-k)_N} \right\}$$

Reflectarea este auto-duala.

14

5. Modificarea scarii timpului

Semnal cu derulare de m ori mai lenta:

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m]; & \text{daca } n:m \text{ (n divisibil cu } m) \\ 0 & ; \text{ altfel} \end{cases} \longleftrightarrow \left\{ \frac{1}{m} c_k \right\}, \text{ perioada } N' = mN$$

Semnalul $x[n]$ periodic de perioada $N \Rightarrow$ Se obtine semnalul $x_{(m)}[n]$ periodic cu perioada $N' = mN$.

$$\begin{aligned} c'_k &= \frac{1}{mN} \sum_{n=0}^{mN-1} x_{(m)}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{mN} n} = \frac{1}{mN} \sum_{p=0}^{N-1} x_{(m)}[pm] e^{-jk \frac{2\pi}{mN} mp} \\ &= \frac{1}{mN} \sum_{p=0}^{N-1} x[p] e^{-jk \frac{2\pi}{N} p} = \frac{1}{m} c_k \end{aligned}$$

15

6. Modularea semnalului

Modularea realizeaza deplasarea cu k_0 a spectrului de modul si faza.

$$e^{jk_0 \frac{2\pi}{N} n} x[n] \longleftrightarrow \left\{ c_{k-k_0} \right\} = \left\{ c_{(k-k_0)_N} \right\}$$

7. Produsul a doua semnale (teorema produsului)

Pentru $x[n]$, $y[n]$ periodice de aceeași perioadă

$$x[n]y[n] \longleftrightarrow \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} c_m^x c_{(k-m)_N}^y \right\} = c_k^x \otimes c_k^y$$

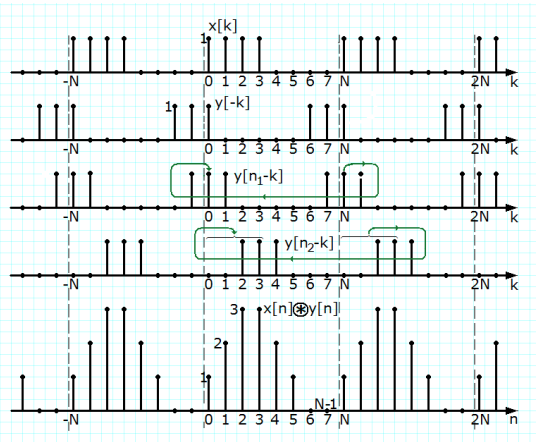
Seria Fourier este convolutia periodica sau circulara a secventelor discrete formate din c_k^x si c_k^y

16

8. Convolutia periodica (teorema convolutiei)

$x[n]$ si $y[n]$ periodice de perioada N , cu seriile Fourier c_k^x si c_k^y
 Convolutia lor circulara este $z[n]$, de asemenea periodica cu N :

$$z[n] = x[n] \circledast y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y[(n-k)_N] \quad z[n] = z[n+N]$$



$$x[n] \circledast y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[n-m] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[(n-m)_N]$$

$$x[n] \circledast y[n] \longleftrightarrow \{Nc_k^x c_k^y\}$$

17

9. Diferentierea discreta a semnalului discret

Echivalenta diferentierii in timp continuu

$$x[n] - x[n-1] \longleftrightarrow \left\{ \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right) c_k \right\}$$

Tema: demonstratie.

10. Insumarea in domeniul (timpului) n

Suma esantioanelor unui semnal $x[n]$ de perioada N , fara componenta continua ($c_0 = 0$) are aceeasi perioada N

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \longleftrightarrow \left\{ \frac{c_k}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} \right\}, \quad c_0 = 0$$

Demonstratie.

$$y[n] - y[n-1] = x[n] \longleftrightarrow \left\{ \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \right) c_k^y \right\} = \{c_k^x\} = \{c_k\}$$

18

11. Proprietati specifice semnalelor reale

Daca $x[n]$ este real,

$$x[n] = x^*[n] \Rightarrow c_k = c_{-k}^* = c_{(-k)_N}^*$$

$$|c_k| = |c_{-k}| = |c_{(-k)_N}^*|; \quad \text{Arg } c_k = -\text{Arg } c_{-k} = -\text{Arg } c_{(-k)_N}$$

$$\text{Re}\{c_k\} = \text{Re}\{c_{-k}\}; \quad \text{Im}\{c_k\} = \text{Im}\{c_{-k}\} = \text{Im}\{c_{(-k)_N}\}$$

12. Seria Fourier a componentei pare si impare

$$x_p[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2} \longleftrightarrow \left\{ \frac{1}{2}c_k + \frac{1}{2}c_{-k} \right\} = \{ \text{Re}\{c_k\} \}$$

$$x_i[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2} \longleftrightarrow \left\{ \frac{1}{2}c_k - \frac{1}{2}c_{-k} \right\} = \{ j \text{Im}\{c_k\} \}$$

19

13 Relatia lui Parseval

$$\|x[n]\|_2^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

Patratul normelor in l^2 .

Puterea P a semnalului discret periodic calculabila

-in timp: ca medie a patratelor esantioanelor temporale,

-in frecventa: ca suma a patratelor modulelor coeficientilor seriei Fourier atasate semnalului.

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

20

Transformarea Fourier in timp discret, pentru semnale discrete

Introducem notiunea de transformata Fourier, pornind de la seria Fourier a unui semnal periodic, a carui perioada tinde la infinit $N \rightarrow \infty$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN]$$

Semnalul de durata finita este:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| \geq N-1 \end{cases}; \quad \tilde{x}[n+N] = \tilde{x}[n], \quad N > 2N_1+1$$

Pentru semnalul periodic avem:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} c_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} \longleftrightarrow c_k = \frac{1}{N} \sum_{k \in \langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

Seria Fourier se poate rescrie:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

21

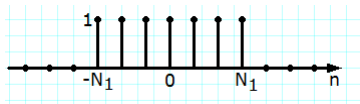
Se defineste anvelopa produsului Nck prin:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

Coeficientii semnalului periodizat devin :

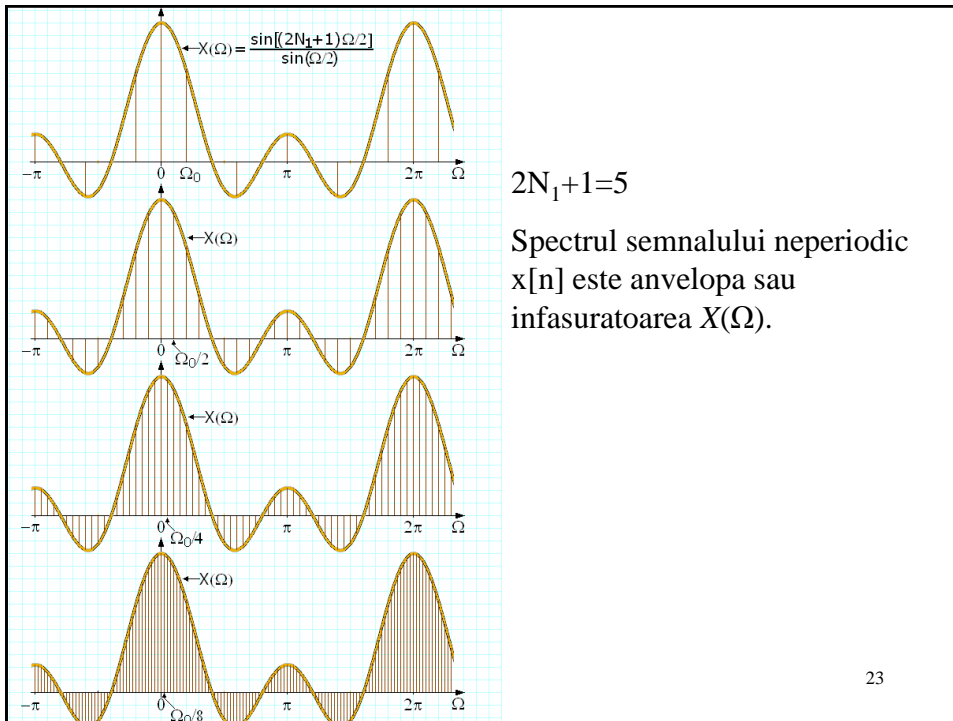
$$c_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0), \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Pentru semnalul considerat



$$X(\Omega) = \frac{\sin\left[(2N_1+1)\frac{\Omega}{2}\right]}{\sin\frac{\Omega}{2}}$$

22



Relatia de recuperare a semnalului este:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \langle N \rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0$$

La limita $N \rightarrow \infty$ ($\Omega_0 \rightarrow 0$), obtinem semnalul neperiodic:

$$x[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad \text{Transformata Fourier in timp discret}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad \text{Transformata Fourier inversa in timp discret}$$

$$c_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0), \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Proprietati.

- Pentru semnale absolut sumabile, $x[n] \in l^1$, transformata converge

$$|X(\Omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-jn\Omega} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \cdot |e^{-jn\Omega}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| = \|x[n]\|_1$$

- **Funcția $X(\Omega)$ este continuă.** $X(\Omega)$ – spectrul unui semnal discret este continuu
- **Spectrul unui semnal discret este o funcție periodică după Ω , cu perioada 2π .** Este deci suficientă reprezentarea pe intervalul $[0, 2\pi)$ sau $[-\pi, \pi)$

$$X(\Omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\Omega + 2\pi)n} = X(\Omega)$$

$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega)$$

$$e^{-j(\Omega + 2\pi)n} = e^{-j\Omega n} \cdot e^{-j2\pi n} = e^{-j\Omega n}$$

25

Semnale de energie finită (semnale de patrat sumabil) $x[n] \in l^2$

Convergența în medie pătratică

$$X(\Omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N x[n] e^{-jn\Omega}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| X(\Omega) - \sum_{n=-N}^N x[n] e^{-jn\Omega} \right\|_2 = 0$$

Trunchierea seriei duce la apariția fenomenului Gibbs (ca și în timp continuu)

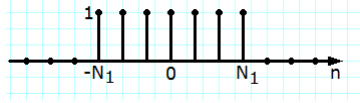
Probleme de convergență apar doar la semnalele cu suport infinit

Semnalele cu suport finit sunt din l^1

26

Exemple

$$1. \quad x[n] = \sigma[n + N_1] - \sigma[n - N_1 - 1] \longleftrightarrow X(\Omega) = \frac{\sin\left[(2N_1 + 1)\frac{\Omega}{2}\right]}{\sin\frac{\Omega}{2}}$$



2. Semnalul treapta unitate

$$x[n] = \delta[n] \longleftrightarrow X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} = e^0 = 1$$

$$\delta[n] \longleftrightarrow 1(\Omega)$$

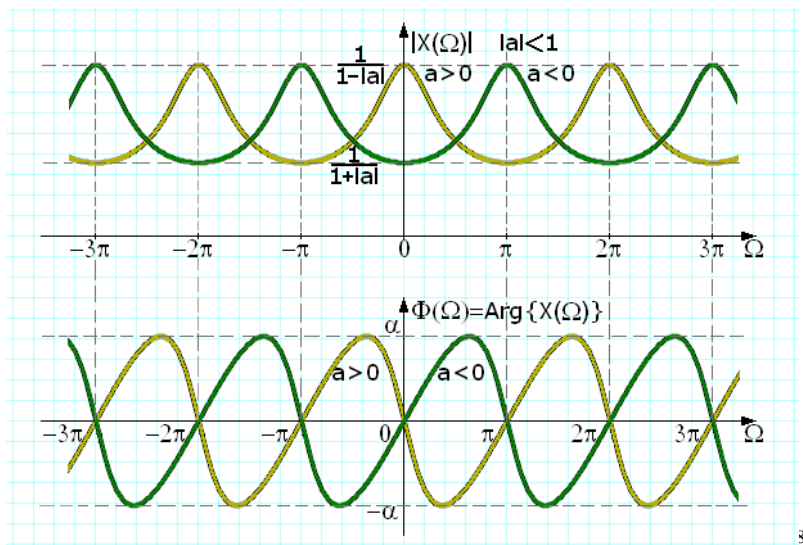
3. Semnalul cauzal $x[n] = a^n \sigma[n]$, $|a| < 1$

Funcție complexă, modul și fază

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \Omega + a^2}}; \quad \Phi(\Omega) = \text{arctg} \frac{a \sin \Omega}{a \cos \Omega - 1}$$

27

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos \Omega + a^2}}; \quad \text{Arg}(X(\Omega)) = \text{arctg} \left(\frac{a \sin \Omega}{a \cos \Omega - 1} \right)$$



3

Transformarea Fourier in timp discret, pentru semnale discrete si periodice

- Poate fi introdusa numai in sens distributional

$$X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi c_{(l)N} \delta\left(\Omega - l \cdot \frac{2\pi}{N}\right), \text{ unde } c_l = c_{(l)N}$$

Un semnal discret periodic, poate fi descompus in seria

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_0 n},$$

Exponentiala complexa cu frecventa $k\Omega_0$ de modul unitar are transformarea in timp discret:

$$e^{jk\Omega_0 n} \longleftrightarrow 2\pi\delta_{2\pi}(\Omega - k\Omega_0)$$

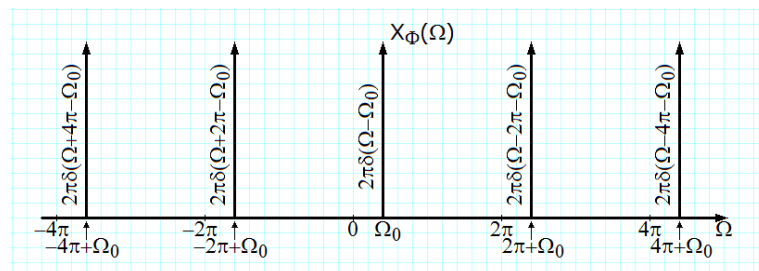
29

Folosind liniaritatea avem

$$x[n] \longleftrightarrow 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} c_k \delta_{2\pi}(\Omega - k\Omega_0)$$

Transformarea exponentialii complexe de modul unitar

$$\Phi[n] = e^{j\Omega_0 n} \longleftrightarrow X_\Phi(\Omega) = 2\pi\delta_{2\pi}(\Omega - \Omega_0) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - k \cdot 2\pi)$$



30

$$x[n] \longleftrightarrow 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} c_k \delta_{2\pi}(\Omega - k\Omega_0)$$

Tinand seama de definitia distributiei Dirac periodice:

$$X(\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \left(2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0 - m \cdot 2\pi) \right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{N-1} 2\pi c_k \delta\left(\Omega - k \frac{2\pi}{N} - m \cdot 2\pi\right) \right)$$

Fie $l = k+mN$.

Tinand cont de periodicitatea seriei Fourier putem scrie $c_l = c_k$

$$X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi c_{(l)_N} \delta\left(\Omega - l \cdot \frac{2\pi}{N}\right), \quad \text{where } c_l = c_{(l)_N}$$

Am obtinut transformarea Fourier in timp discret pentru un semnal periodic discret.

31

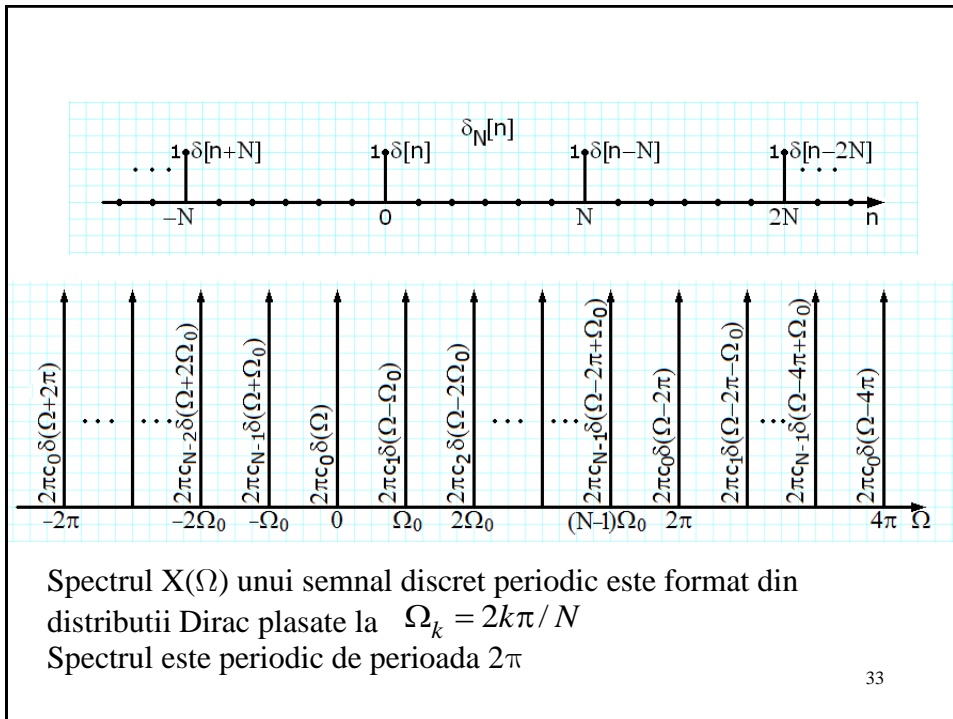
Exemplu: Distributia Dirac periodica

$$\delta_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \xrightarrow{\text{seria Fourier}} c_k = \frac{1}{N}$$

$$X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi c_l \delta\left(\Omega - l \cdot \frac{2\pi}{N}\right)$$

$$\delta_N[n] \longleftrightarrow \Omega_0 \delta_{\Omega_0}(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left[\Omega - k \frac{2\pi}{N}\right]; \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

32



33

Proprietati

1. Liniaritatea

$$ax[n] + by[n] \leftrightarrow aX(\Omega) + bY(\Omega).$$

2. Deplasarea in timp a semnalului

$$x[n - n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega n_0} X(\Omega).$$

3. Modularea in domeniul timp

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0).$$

4. Scalarea variabilei timp

$$x_{(k)}[n] \leftrightarrow X(k\Omega).$$

34

5. Conjugarea complexa a semnalului

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(-\Omega).$$

6. Reflectarea in timp a semnalului

$$x[-n] \leftrightarrow X(-\Omega).$$

7. Diferentierea numerica a semnalului discret

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{-j\Omega})X(\Omega).$$

8. Convolutia semnalelor (teorema convolutiei)

$$x[n] * y[n] \leftrightarrow X(\Omega)Y(\Omega).$$

35

9. Insumarea in domeniul timpului

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \frac{X(\Omega)}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi X(0)\delta_{2\pi}(\Omega).$$

10. Produsul semnalelor discrete

$$x[n]y[n] \leftrightarrow \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_{2\pi} X(u)Y(\Omega - u)du = \left(\frac{1}{2\pi}\right) X(\Omega) \otimes Y(\Omega).$$

11. Derivarea in domeniul spectrului

$$nx[n] \leftrightarrow j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}.$$

36

12. Spectrele semnalelor reale

$$x^*[n] = x[n] \Rightarrow X^*(-\Omega) = X(\Omega).$$

$$x_p[n] \leftrightarrow \text{Re}\{X(\Omega)\}; x_i[n] \leftrightarrow j \text{Im}\{X(\Omega)\}.$$

$$|X(\Omega)| = |X(-\Omega)|; \text{Arg}(X(\Omega)) = -\text{Arg}(X(-\Omega));$$

$$\text{Re}\{X(\Omega)\} = \text{Re}\{X(-\Omega)\}; \text{Im}\{X(\Omega)\} = -\text{Im}\{X(-\Omega)\}.$$

13. Relatia lui Parseval

$$x[n] \in l^2, \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega;$$

$$\|X(\Omega)\|_{L^2_{[-\pi,\pi]}}^2 = 2\pi \|x[n]\|_{l^2}^2.$$

$$\forall x[n], y[n] \in l^2, \langle X(\Omega), Y(\Omega) \rangle_{L^2_{[-\pi,\pi]}} = 2\pi \langle x[n], y[n] \rangle_{l^2}$$

37

Densitatea spectrala de energie

Se noteaza cu $S_X(\Omega)$.

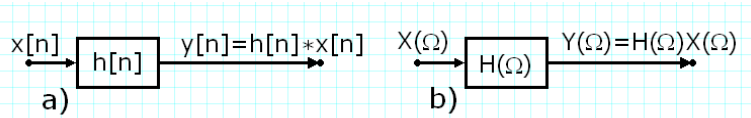
$$S_X(\Omega) = |X(\Omega)|^2;$$

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_X(\Omega) d\Omega.$$

Energia se obtine prin integrarea densitatii spectrale de energie

38

Raspunsul in frecventa al SLITD



Raspunsul la impulsul unitar: $h[n] \leftrightarrow H(\Omega)$.

Transformata sa Fourier este raspunsul sistemului in frecventa $H(\Omega)$. Cunoscand $H(\Omega)$ se poate afla iesirea pentru orice intrare.

- i)** Se determina spectrul semnalului de intrare $x[n]$, $X(\Omega)$,
- ii)** Se determina spectrul semnalului de iesire $y[n]$, $Y(\Omega)$,
- iii)** Se descompune $Y(\Omega)$ intr-o suma de fractii simple si se aplica transformarea Fourier inversa. Pentru aceasta, se folosesc de obicei tabelele de transformate!

Raspunsul unui SLITD la un semnal de intrare discret si periodic

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k H(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}; \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

In cazul particular semnal de intrare armonic:

$$x[n] = A \cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \varphi_0\right) \rightarrow y[n] = A |H(\Omega_0)| \cos[\Omega_0 n + \Phi(\Omega_0) + \varphi_0]$$

Demonstratie!

$$x[n] = A \cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \varphi_0\right) = \frac{A}{2} \left(e^{j\left(\frac{2\pi}{N}n + \varphi_0\right)} + e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}n + \varphi_0\right)} \right)$$

Coeficientii Fourier:

$$c_1 = \frac{A}{2} e^{j\varphi_0}; \quad c_{-1} = c_{N-1} = \frac{A}{2} e^{-j\varphi_0}$$

$$y[n] = \frac{A}{2} e^{j\varphi_0} H(\Omega_0) e^{j\Omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi_0} H(-\Omega_0) e^{-j\Omega_0 n}; \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$H(\Omega) = H^*(-\Omega) \text{ fiindca } h[n] \in \mathbb{R}$$

$$y[n] = \frac{A}{2} |H(\Omega_0)| e^{j[\Omega_0 n + \Phi(\Omega_0) + \varphi_0]} + \frac{A}{2} |H(\Omega_0)| e^{-j[\Omega_0 n + \Phi(\Omega_0) + \varphi_0]}$$

$$y[n] = A |H(\Omega_0)| \cos[\Omega_0 n + \Phi(\Omega_0) + \varphi_0]; \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

41

SLITD descrise de ecuatii cu diferente finite liniare cu coeficienti constanti

Forma generala a ecuatiei este

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad a_0 \neq 0$$

Se aplica transformarea Fourier :

$$Y(\Omega) \sum_{k=0}^N a_k \left(e^{-j\Omega} \right)^k = X(\Omega) \sum_{k=0}^M b_k \left(e^{-j\Omega} \right)^k, \quad a_0 \neq 0.$$

Rezulta raspunsul in frecventa al sistemului

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \left(e^{-j\Omega} \right)^k}{\sum_{k=0}^N a_k \left(e^{-j\Omega} \right)^k}; \quad a_0 \neq 0.$$

42

Exemple

$$\text{i)} \quad y[n] - \frac{\sqrt{2}}{2} y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

Raspunsul in frecventa

$$H(\Omega) = \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\Omega} + \frac{1}{4} e^{-2j\Omega}} = \frac{1 - e^{-j\Omega}}{(1 - \alpha_1 e^{-j\Omega})(1 - \alpha_2 e^{-j\Omega})}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 \pm j) = \frac{1}{2} e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$$

Se face descompunerea in fractii simple:

$$H(\Omega) = \frac{A_1}{1 - \alpha_1 e^{-j\Omega}} + \frac{A_2}{1 - \alpha_2 e^{-j\Omega}}; \quad A_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j \frac{2\sqrt{2}-1}{2}$$

43

Luand transformarea inversa se obtine raspunsul la impuls al sistemului

$$\begin{aligned} h[n] &= (A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n) \sigma[n] \\ &= \frac{1}{2^n} \left[\left(\frac{1}{2} + j \frac{2\sqrt{2}-1}{2} \right) e^{jn\frac{\pi}{4}} + \left(\frac{1}{2} - j \frac{2\sqrt{2}-1}{2} \right) e^{-jn\frac{\pi}{4}} \right] \sigma[n] \\ &= \frac{1}{2^n} \left[\cos n \frac{\pi}{4} - (2\sqrt{2}-1) \sin n \frac{\pi}{4} \right] \sigma[n] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2^n} \left(\cos \frac{n+1}{4} \pi - 2 \sin n \frac{\pi}{4} \right) \sigma[n] \end{aligned}$$

44

ii) Determinam raspunsul la impuls al sistemului din raspunsul in frecventa:

$$H(\Omega) = \frac{3}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1 - \frac{1}{8}e^{-j\Omega}\right)}$$

Descompunere in fractii simple:

$$H(\Omega) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{8}e^{-j\Omega}}$$

Transformarea Fourier inversa :

$$h[n] = \left(4 \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{3n}}\right) \sigma[n]$$

45

iii) Obtinem raspunsul la impuls $h[n]$ si raspunsul la treapta unitara (functia indiciala) $s[n]$ pentru sistemul descris de ecuatia

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \quad |a| < 1$$

Se identifica coeficientii si avem:

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \Rightarrow \text{raspunsul la impuls } h[n] = a^n \sigma[n]$$

Transformarea Fourier a semnalului treapta unitara $\sigma[n]$ este:

$$X_0(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \delta_{2\pi}(\Omega)$$

Raspunsul la treapta unitara, $s[n]$, are transformarea:

$$S(\Omega) = H(\Omega) X_0(\Omega) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})(1 - e^{-j\Omega})} + \frac{\pi}{1 - a} \delta_{2\pi}(\Omega)$$

46

Descompunere in fractii simple:

$$S(\Omega) = \frac{a}{1-a} \cdot \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} + \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \frac{\pi}{1-a} \delta_{2\pi}(\Omega)$$

$$S(\Omega) = \frac{a}{1-a} \cdot \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} + \frac{1}{1-a} \left[\frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi \delta_{2\pi}(\Omega) \right]$$

Se aplica transformarea Fourier inversa si rezulta functia indiciala $s[n]$

$$s[n] = -\frac{a}{1-a} a^n \sigma[n] + \frac{1}{1-a} \sigma[n] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \sigma[n]$$

47

SLITD de ordinul intai si doi

Raspunsul in frecventa a unui SLITD este o functie rationala. Numitorul si numaratorul pot fi scrise ca si produs de factori cu coeficienti reali de gradul unu si doi.

$$H(\Omega) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^P (1 + \beta_{1k} e^{-j\Omega} + \beta_{2k} e^{-2j\Omega}) \prod_{k=1}^{M-2P} (1 + \mu_k e^{-j\Omega})}{a_0 \prod_{k=1}^Q (1 + \alpha_{1k} e^{-j\Omega} + \alpha_{2k} e^{-2j\Omega}) \prod_{k=1}^{N-2Q} (1 + \eta_k e^{-j\Omega})}$$

Implementarea : sisteme de ordinul unu sau doi conectate in serie realizate in forma directa II

(Produsul in domeniul frecventa inseamna convolutie in timp)

48

$$H(\Omega) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^P (1 + \beta_{1k} e^{-j\Omega} + \beta_{2k} e^{-2j\Omega}) \prod_{k=1}^{M-2P} (1 + \mu_k e^{-j\Omega})}{a_0 \prod_{k=1}^Q (1 + \alpha_{1k} e^{-j\Omega} + \alpha_{2k} e^{-2j\Omega}) \prod_{k=1}^{N-2Q} (1 + \eta_k e^{-j\Omega})}$$

Pentru $M=N$, descompunerea in fractii simple

$$H(\Omega) = \frac{b_N}{a_N} + \sum_{k=1}^Q \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} e^{-j\Omega}}{1 + \alpha_{1k} e^{-j\Omega} + \alpha_{2k} e^{-2j\Omega}} + \sum_{k=1}^{N-2Q} \frac{A_k}{1 + \eta_k e^{-j\Omega}}$$

Implementarea : sisteme de ordinul unu sau doi conectate in paralel realizate in forma directa II

49

- Un polinom de ordinul intai \Leftrightarrow sistem de ordin intai
- Un polinom de ordinul doi \Leftrightarrow sistem de ordin doi.

Cunoscand comportamentul in frecventa al sistemelor de ordinul intai si doi, putem deduce comportamentul in frecventa oricarui sistem SLITD.

Rezulta importanta sistemelor de ordinul unu si doi.

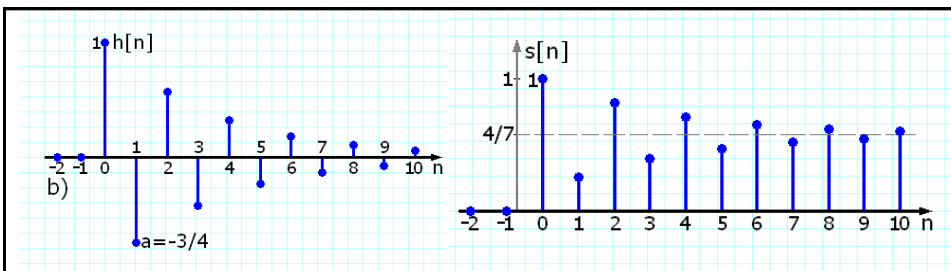
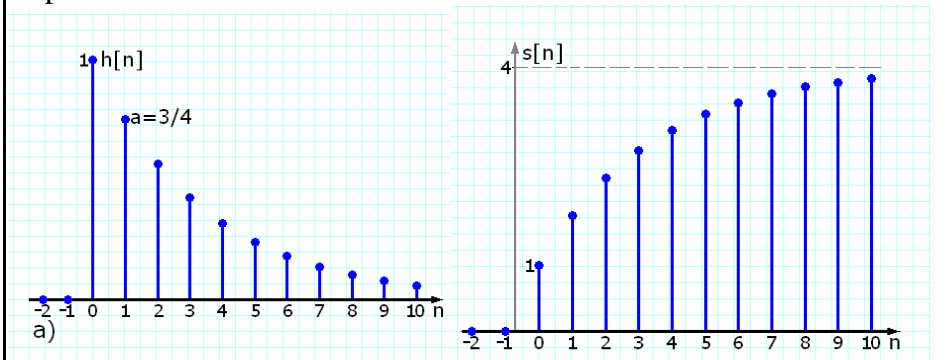
50

Sisteme discrete de ordinul intai

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \quad |a| < 1. \quad H(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}};$$

$$h[n] = a^n \sigma[n]. \quad s[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \sigma[n].$$

Pentru $0 < a < 1$ raspunsul la impuls precum si raspunsul indicial nu prezinta oscilatii



Pentru $-1 < a < 0$ raspunsurile au caracter oscilant!

$$y[n] - ay[n-1] = x[n], \quad |a| < 1. \quad H(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}};$$

$$h[n] = a^n \sigma[n]. \quad s[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \sigma[n].$$

Sisteme discrete de ordinul doi

Ecuatia cu doi parametri:

$$y[n] - 2\rho \cos \theta y[n-1] + \rho^2 y[n-2] = x[n], \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

Raspunsul in frecventa:

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - 2\rho \cos \theta e^{-j\Omega} + \rho^2 e^{-2j\Omega}} = \frac{1}{(1 - \rho e^{j\theta} e^{-j\Omega})(1 - \rho e^{-j\theta} e^{-j\Omega})}$$

Raspunsul la impuls:

$$h[n] = \frac{e^{j\theta}}{2j \sin \theta} [e^{j\theta} \rho^n e^{jn\theta} - e^{-j\theta} \rho^n e^{-jn\theta}] \sigma[n] = \rho^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \sigma[n], \quad \theta \in (0, \pi).$$

Raspunsul indicial:

$$s[n] = \left[\frac{e^{j\theta}}{2j \sin \theta} \frac{1 - (\rho e^{j\theta})^{n+1}}{1 - \rho e^{j\theta}} - \frac{e^{-j\theta}}{2j \sin \theta} \frac{1 - (\rho e^{-j\theta})^{n+1}}{1 - \rho e^{-j\theta}} \right] \sigma[n]; \quad \theta \in (0, \pi).$$

53

Sistem de ordinul doi: $\theta=0$

1.

$$\theta = 0.$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{(1 - \rho e^{-j\Omega})^2} \Rightarrow h[n] = (n+1)\rho^n \sigma[n].$$

$$S(\Omega) = -\frac{\rho}{1-\rho} \frac{1}{(1-\rho e^{-j\Omega})^2} - \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \frac{1}{1-\rho e^{-j\Omega}} + \frac{1}{(1-\rho)^2} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \frac{\pi}{(1-\rho)^2} \delta_{2\pi}(\Omega).$$

$$s[n] = \left[\frac{1}{(1-\rho)^2} - \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \rho^n - \frac{\rho}{1-\rho} (n+1)\rho^n \right] \sigma[n].$$

54

2. Sistem de ordinul doi: $\theta = \pi$

$$\theta = \pi.$$

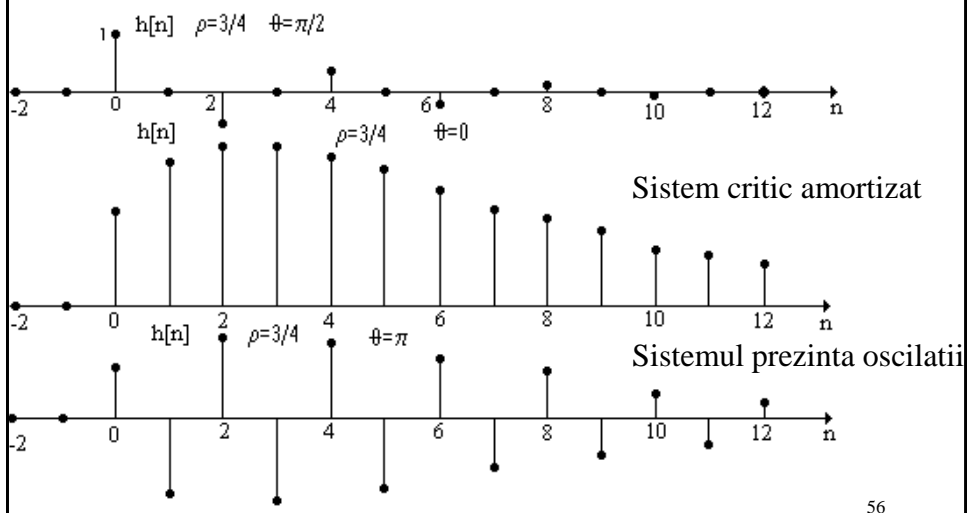
$$H(\Omega) = \frac{1}{(1 + \rho e^{-j\Omega})^2}.$$

$$h[n] = (n+1)(-\rho)^n \sigma[n],$$

$$s[n] = \left[\frac{1}{(1+\rho)^2} + \frac{\rho}{(1+\rho)^2}(-\rho)^n + \frac{\rho}{1+\rho}(n+1)(-\rho)^n \right] \sigma[n].$$

55

Sistem de ordin doi. Raspunsul la impuls pentru $\theta = \pi/2$, $\theta = 0$, $\theta = \pi$



56

Raspunsul in frecventa

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{4\rho^2 \cos^2 \Omega - 4\rho(1+\rho^2)\cos\theta\cos\Omega + (1-\rho^2)^2 + 4\rho^2 \cos^2 \theta}}$$

$$\Phi(\Omega) = -\text{arctg} \frac{2r \sin\theta(a - r \cos\Omega)}{1 - 2r \cos\theta \cos\Omega + r^2 \cos 2\Omega}$$

57

Funcția de corelație. Densitatea spectrală de putere și de energie a semnalelor discrete

$$R_x[k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^*[n]x[n+k]$$

Dacă $x[n]$ este **periodic** de perioada N_0 :

$$R_x[k] = \sum_{n=0}^{N_0-1} |c_m|^2 e^{jm\Omega_0 k}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

Funcția $R_x[k]$ este periodică de perioada N_0

$$R_x[k] = R_x[k + N_0] = \sum_{n=0}^{N_0-1} x^*[n]x[(n+k)_N] = \sum_{n=0}^{N_0-1} |c_m|^2 e^{jm\Omega_0 k},$$

Teorema Wiener-Hincin: R_x are coeficienții seriei Fourier exponentiale

$$R_x[k] \longleftrightarrow \{ |c_m|^2 \}$$

58

$$R_x[0] = P = \sum_{n=0}^{N_0-1} |c_m|^2; \quad |R_x[k]| \leq P$$

P - puterea medie pe o perioada N_0 a semnalului $x[n]$

$$R_x[-k] = R_x[k]$$

Se definește **densitatea spectrală de putere a semnalului** $x[n]$ ca transformata Fourier în timp discret a semnalului periodic:

$$R_x[k] \longleftrightarrow S_x(\Omega) = \sum_{n=0}^{N_0-1} 2\pi |c_m|^2 \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

o alta forma a teoremei Wiener-Hincin.

59

Pentru un **semnal de energie infinita, dar putere medie finita, neperiodic**, densitatea spectrală de putere este transformata Fourier a functiei de corelatie:

$$S_x(\Omega) = \mathcal{F}\{R_x[k]\}$$

$S_x(\Omega)$ periodica, perioada 2π , nenegativa, para.

$$P = R_x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} S_x(\Omega) d\Omega$$

60

Functia de intercorelatie pentru semnale discrete de energie infinita dar de putere medie finita

$$R_{xy}[k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^*[n]y[n+k].$$

In cazul a doua semnale periodice de aceasi perioada N_0 :

$$R_{xy}[k + N_0] = R_{xy}[k].$$

Functia de intercorelatie a semnalelor discrete, periodice, aceeasi perioada:

$$R_{xy}[k] = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x^*[n]y[n+k].$$

61

Proprietati

$$R_{xy}[-k] = R_{yx}^*[k].$$

$$|R_{xy}[k]|^2 \leq R_x[0]R_y[0] = P_x P_y.$$

P_x, P_y puterile semnalelor discrete $x[n], y[n]$

Pentru $x = y$ functia de intercorelatie $R_{xy} = R_{xx} = R_x$ devine functia de corelatie sau autocorelatie.

62

Funcția de corelație pentru semnale discrete de energie finită

Măsoară gradul de asemanare a celor două semnale.

$$R_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]y[n+k]$$

$$= x^*[-k] * y[k] = \tilde{x}^*[k] * y[k].$$

$R_{xy}[k] \leftrightarrow X^*(\Omega)Y(\Omega) = S_{XY}(\Omega)$ - densitate interspectrală de energie

$x[n] = y[n]$, funcția de autocorelație

$$R_x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]x[n+k] = \tilde{x}^*[k] * x[k].$$

63

Proprietăți ale funcției de autocorelație a semnalelor discrete de energie finită

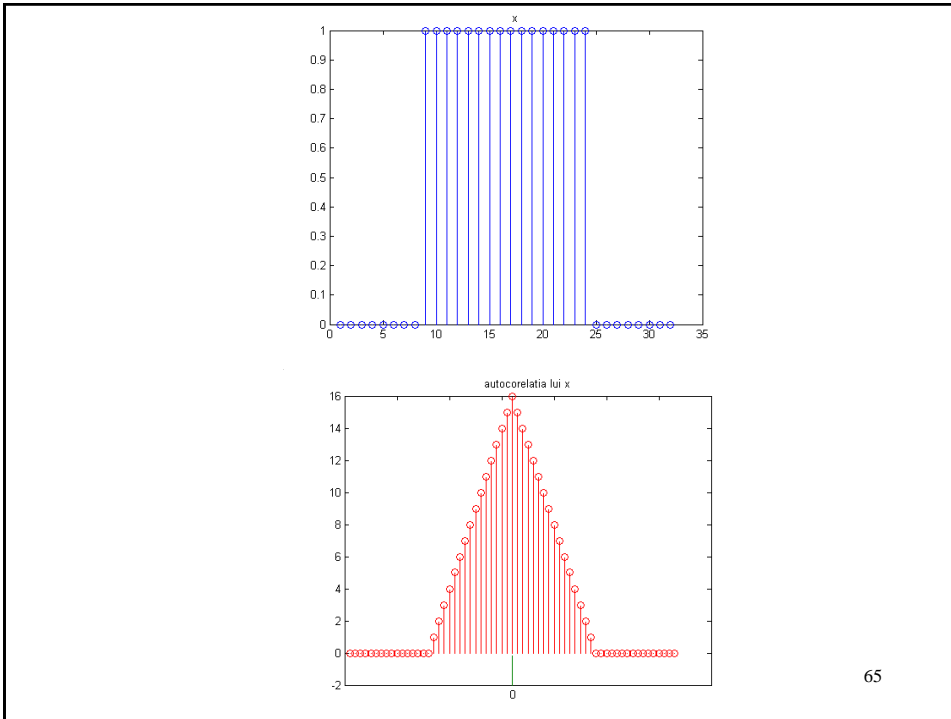
Teorema Wiener-Hincin

$$R_x[k] \leftrightarrow |X(\Omega)|^2 = S_x(\Omega).$$

$$W_x = R_x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega.$$

Funcția $R_x[k]$ este pară și își atinge maximumul în origine.

64



65

Relatia intre densitatile spectrale de putere si de energie ale semnalelor ce trec prin sisteme discrete, lineare si invariante in timp

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

$$S_Y(\Omega) = |H(\Omega)|^2 S_X(\Omega).$$

S_X sau Y – densitate spectrala de putere
(pentru semnalele de putere medie finita)
sau densitate spectrala de energie
(pentru semnalele de energie finita).

$$R_y[n] = R_x[n] * R_h[n]$$

corelatoare

66