ESANTIONAREA SI MEMORAREA SEMNALELOR ANALOGICE

1. SCOPUL LUCRARII

În lucrare se studiază diverse tipuri de eşantionarea a semnalelor analogice, din punct de vedere al formei semnalelor în domeniul timp, respectiv al spectrelor acestora.

2. SEMNALE ESANTIONATE IN CIRCUITE ANALOGICE

Eşantionarea semnalelor analogice se poate realiza cu un circuit de forma celui din figura 1a).

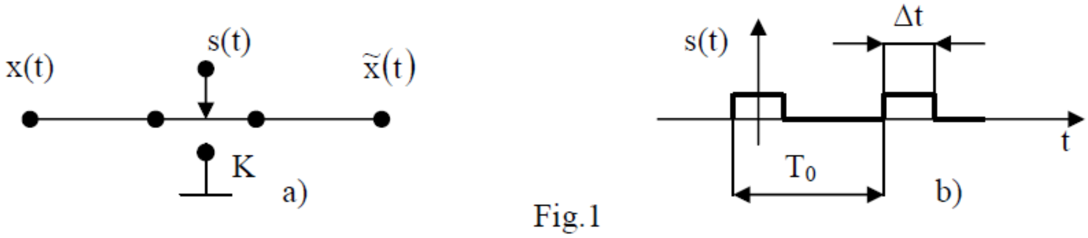

Fig.1

Comutatorul K se închide şi se deschide în ritmul semnalului s(t), aducând la ieşirea circuitului fracţiuni din semnalul de intrare x(t) de durată Δt, respectiv conectând ieşirea circuitului la masă.

Considerând durata impulsului Δt mult mai mică decât perioada sa T0, semnalul de ieşire al circuitului de eşantionare poate fi definit cu o relaţie de forma:

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t), pt.t \in [kT_e, kT + \Delta t] \\ 0, pt.t \in [kT_e + \Delta t, (k+1)T] \end{cases}, \quad k \in Z \qquad (1)$$

sau

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\left[\sigma(t - kT_e + \frac{\Delta t}{2}) - \sigma(t - kT_e - \frac{\Delta t}{2})\right] \qquad (2)$$

sau

$$\tilde{x}(t) = x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\left[\sigma(t + \frac{\Delta t}{2}) - \sigma(t - \frac{\Delta t}{2})\right] * \delta(t - kT_e)\} \qquad (3)$$

care se poate scrie:

$$\tilde{x}(t) = x(t)\{\left[\sigma(t+\frac{\Delta t}{2}) - \sigma(t-\frac{\Delta t}{2})\right] * \delta_{T_e}(t)\} \tag{4}$$

Spectrul semnalului eşantionat este dat de transformata Fourier a semnalului $\tilde{x}(t)$:

$$\mathcal{F}\left\{\tilde{x}(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{x(t)\left\{\left[\sigma(t+\frac{\Delta t}{2}) - \sigma(t-\frac{\Delta t}{2})\right] * \delta_{Te}(t)\right\}\right\} \tag{5}$$

sau

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{x\right\} * \left[\mathcal{F}\{\sigma(t+\frac{\Delta t}{2}) - \sigma(t-\frac{\Delta t}{2})\}\mathcal{F}\{\delta_{T_e}(t)\}\right] \tag{6}$$

unde folosind

$$\mathcal{F}\{\delta_{T_e}(t)\} = \frac{2\pi}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \frac{2\pi}{T_e}) \tag{7}$$

efectuand convolutia din relatia (6) se obtine :

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\{\sigma(t+\frac{\Delta t}{2}) - \sigma(t-\frac{\Delta t}{2})(k\frac{2\pi}{T_e})\mathcal{F}\left\{x(t)\right\}(\omega - k\frac{2\pi}{T_e}) \tag{8}$$

sau explicitând transformarea Fourier a impulsului:

$$\mathcal{F}\left\{\tilde{x}(t)\right\} = \frac{\Delta t}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(k\pi\Delta t / T_e)}{k\pi\Delta t / T_e}\mathcal{F}\left\{x\right\}\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_e}\right) \tag{9}$$

Expresia $\frac{\sin(k\pi\Delta t / T_e)}{k\pi\Delta t / T_e}$ caracterizează ***anvelopa*** spectrului $\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\}$. Daca spectrul lui x este cel din figura 2a), atunci spectrul lui $\tilde{x}$ este cel din figura 2b).

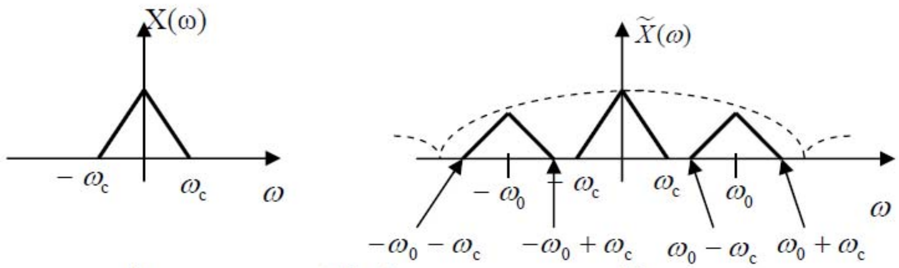

Fig. 2

După cum se observa, reconstrucție semnalului *x(t)* din semnalul $\tilde{x}(t)$ poate fi realizată prin filtrarea trece jos, dacă spectrele individuale $\mathcal{F}\{x\}\{\omega-2\pi/T_e\cdot k\}$ nu se suprapun. Conform figurii aceasta condiție este:

$$\omega_e-\omega_M\leq\omega_e \tag{10}$$

rezultat care se înscrie sub numele de **teorema eşantionării**.

Teorema WKS (Whittaker, Kotelnicov, Shannon) Daca semnalul $x(t)$ este de banda limitata la ω_M, atunci el este unic determinat de esantioanele sale $\{x(nT_e)|n\in\mathbb{Z}\}$ frecventa de esantionare este cel putin dublul frecventei maxime a semnalului:

$$\omega_s\geq 2\omega_M \text{ cu } \omega_s=\frac{2\pi}{T_s}.$$

Dacă *x(t)* este un **semnal periodic de perioadă** T si presupunand ca este limitat in frecventa la a N'a armonica:

$$\omega_M = N\omega_0;\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T} \tag{11}$$

atunci inegalitatea (10) devine stricta:

$$\boxed{\omega_e>2N\omega_0=2\omega_M}$$

Observatie: Daca perioada semnalului este multiplu al perioadei de esantionare T_s, atunci si ***semnalul esantionat este periodic***.

$$T = mT_e,\ m\in\mathbb{N}$$

adica:

$$\boxed{\omega_e \geq (2N+1)\omega_0}$$

Acesta poate fi privit ca şi prelungirea prin periodicitate a semnalului aperiodic $x_a(t)$.

Eşantionând acest semnal se obține semnalul $\tilde{x}_a(t)$. Relația (9) se poate scrie pentru acest caz astfel:

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}_a(t)\} = \frac{\Delta t}{T_e}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(l\pi\frac{\Delta t}{T_e})}{l\pi\frac{\Delta t}{T_e}}F\{x_a\}\left(\omega - l\frac{2\pi}{T_e}\right) \tag{12}$$

Dar:

$$c_{kx} = \frac{1}{T}\mathcal{F}\{x_a\}(k\frac{2\pi}{T}) \tag{13}$$

si

$$c_{k\tilde{x}} = \frac{1}{T}\mathcal{F}\{\tilde{x}_a\}(k\frac{2\pi}{T}) \tag{14}$$

Substituind relatiile (13) si (14) in (12) se obtine legatura intre coeficientii dezvoltarii in serie Fourier a semnalelor x si $\tilde{x}$ sub forma:

$$c_{k\tilde{x}} = \frac{\Delta t}{T_e}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(l\pi\frac{\Delta t}{T_e})}{l\pi\frac{\Delta t}{T_e}}c_{k-mlx} \tag{15}$$

Pe baza acestei relații se poate trasa spectrul de amplitudini al semnalului eşantionat.

În cazul eşantionării cu memorare se utilizează un circuit de tipul celui din figura 3a), semnalul cu care se comandă eşantionarea fiind cel din figura 3b).

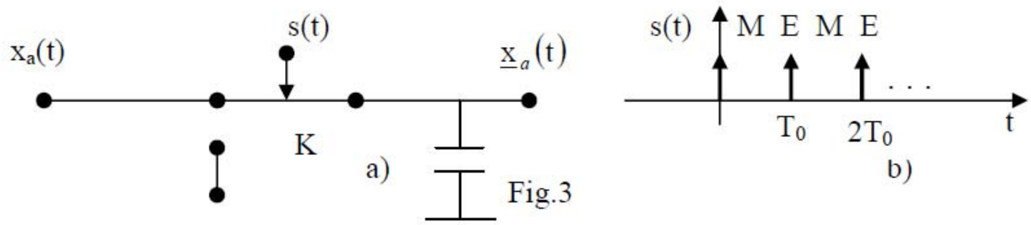

Fig.3

Spectrul semnalului eşantionat şi memorat este:

$$\mathcal{F}\left\{\underline{x}_a\right\} = e^{-j\omega T_e/2}\,\frac{\sin\left(\omega T_e/2\right)}{\omega T_e/2}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}\left\{x\right\}\left(\omega - l\frac{2\pi}{T_e}\right) \tag{16}$$

Prelungind prin periodicitate $\underline{x_a(t)}$ la semnalul $\underline{x(t)}$ se obține semnalul periodic $\underline{x(t)}$ ai cărui coeficienți ai dezvoltării în serie Fourier sunt dați de relația:

$$c_{k\underline{x}} = e^{-jk\pi T_e/T}\,\frac{\sin\left(k\pi T_e/T\right)}{k\pi T_e/T}\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k-mlx} \tag{17}$$

3. DESFASURAREA LUCRARII

3.1. Pentru desfasurarea lucrarii dispunem de urmatoarele dispozitive electronice:

- **Generator de semnal**

  Se alege semnal sinusoidal, frecventa f_0 = 1kHz; amplitudine 2V; offset 0; faza 0.

- **Circuit de esantionare** cu *n* esantioane pe perioada (n=2, 4, 8, 16) alimentat la sursa. Are doua moduri de functionare: *cu memorare* sau *esantionare naturala*. Se alege esantionarea cu memorare (butonul Sample/Hold in pozitia sus pe panoul frontal).
Se modifica *n* cu ajutorul comutatorului *Sample Nr* de pe panoul frontal: 4, 8, 16.

- **Osciloscop**

Se vizualizeaza semnalul sinusoidal de esantionat pe canalul 1 (de la iesirea generatorului de semnal) si semnalul esantionat pe canalul 2 (de la iesirea circuitului de esantionare).

- **Analizor de spectru (0-300kHz)**
Se fixeaza gama de frecvente Range 0-30kHz; R=600Ω
Input level -10dBm/dBV; nivelul de referinta (Log ref level) 10mV/div pe scara liniara; Sensibilitatea liniara (Linear sensitivity) 1

- scan width, scan time si band width trebuie alese corelat.
Scan width 5kHz/div; Bandwidth 300Hz; Scan time 0.5 sec/div

Frecventa 0; Video filter OFF; Mod scanare (Scan mode) SINGLE; Scan trigger - auto
Pentru vizualizare: persistenta (Persistence) pe valoare maxima; intensitatea spotului (Intensity) pe o valoare medie.

Pentru a putea vizualiza spectrul butonul STD trebuie sa fie apasat. Pentru a se sterge ecranul se apasa ERASE. Pentru a memora spectrul de pe ecrane se apasa butonul STORE. Pentru a iesi din modul de memorare se apasa pe STD si apoi ERASE.

Se studiază efectul modificării factorului de umplere al impulsului de eşantionare. Factorul de umplere al impulsurilor de esantionare se modifica fin cu ajutorul comutatorului numit *Duty*.

Se observa ca pentru un factor de umplere minim semnalul esantionat seamana cu unul esantionat ideal (se lucreaza in modul sample and hold-cu memorare).

Se vizualizeaza spectrul semnalului esantionat, atunci cand durata impulsurilor de esantionare este minima.

Se reprezinta pe hartie milimetrica:

- semnalul de esantionat sinusoidal;
- semnalul esantionat pentru fiecare valoare a lui *n* (4, 8, 16);
- spectrul semnalului esantionat in fiecare caz.

Cat este frecventa de esantionare in fiecare caz?

Atentie : - spectrul se reprezinta pentru o valoare minima a factorului de umplere a impulsurilor de esantionare.

- Analizorul de spectru este reglat astfel incat frecventa zero sa fie in centru (a se vedea mai jos*).

3.2. Se va rula in MATLAB programul *aliasing.m*. Acesta permite să se observe efectul erorii de aliere care apare în urma eşantionării unui semnal cu o frecvență care nu este suficient de mare încât să permită reconstrucția lui. În care dintre cazuri această eroare afectează decisiv calitatea semnalului audio reprodus? Semnalul este esantionat cu frecventa de esantionare 8000 Hz, 6000 Hz si respectiv 2666.6667 Hz. Desenati spectrele in fiecare caz si explicate ce se intampla. Cand apare alierea ? Se tine cont de faptul ca semnalul audio are spectrul intre 300Hz si 3400 Hz.

Notă: acest program este preluat din CD-ul ataşat cărţii "Digital signal Processing: A Computer based approach – the 3rd edition", autor: Sanjit K. Mitra.

***Ajustarea valorii frecventei zero la analizorul de spectru.**
Se scoate semnalul de la intrarea analizorului. Analizorul se trece pe mod conventional de afisare – butonul *CONV* este apasat. Comutatorul de frecventa (dedesubtul scarii de frecventa) este setat pe zero (si fin si brut).
Se pune timpul de scanare (*time scan*) mai rapid decat uzual (20ms/div). Daca este necesar, se creste sensibilitatea.
Acum ar trebui sa vedem markerul de zero. Se foloseste butonul *Zero adj* de ajustare a pozitiei zero pentru a muta pozitia catre centru (se invarte spre stanga daca dorim ca pozitia zeroului mai la dreapta si invers). Dupa ce pozitia zero este fixata, se aduce semnalul din nou la intrarea analizorului, si se pun din nou parametric normali.