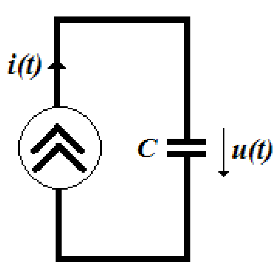
Stabilitatea sistemelor liniare si invariante in timp

In continuare ne vom referi la sisteme liniare si invariante in timp cauzale.

Analiza stabilitatii in domeniul timp

IMEM



$u(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$; Fie un semnal de excitatie marginit : $i(\tau)=\sigma(\tau)\Rightarrow$

$u(t)=\frac{1}{C}\int_0^t \sigma(\tau)d\tau=\frac{t}{C}$, semnal nemarginit.

Sistemul nu este stabil. Daca este excitat cu semnale marginite de durata limitata raspunsul sau devine marginit.

$$i(t)=\sigma(t)-\sigma(t-T)\Rightarrow u(t)=\begin{cases}\frac{t}{C}, & 0\le t\le T\\ \frac{T}{C}, & \text{in rest.}\end{cases}$$

Sistemele care raspund cu semnale marginite la excitatii marginite de durata nelimitata si cu semnale nemarginite la excitatii marginite de durata nelimitata se numesc stabile in sens larg.

Acumulatorul. $h[n]=\sigma[n]$. $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\sigma[n-k]$; $x[k]=\sigma[k]\Rightarrow$

$\Rightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{n}1=n+1.$

$x[n]=\sigma[n]-\sigma[n-N]\Rightarrow y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sigma[n-k](\sigma[k]-\sigma[k-N])$

$n<0\Rightarrow y[n]=0.$

$0\le n<N\Rightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{n}1=n+1<N+1;$

$n\ge N\Rightarrow y[n]=\sum_{k=0}^{N}1=N+1.$

Acumulatorul este un sistem in timp discret stabil in sens larg.

Analiza stabilitatii in domeniul frecventa

Cazul sistemelor in timp continuu

$$H(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{a_0s^m+a_1s^{m-1}+\ldots+a_{m-1}s+a_m}{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\ldots+b_{n-1}s+b_n}.$$

Daca $m>n$. $H(s)=c_0s^{m-n}+c_1s^{m-n-1}+\ldots+c_{m-n-1}s+c_{m-n}+\frac{P_1(s)}{Q(s)};$

cu $gr\{P_1(s)\}<gr\{Q(s)\}$.

$Q(s)=(s-s_1)^{r_1}(s-s_2)^{r_2}\ldots(s-s_p)^{r_p}\Rightarrow$

$$\Rightarrow H(s)=\sum_{k=0}^{m-n}c_{m-n-k}s^k+\frac{P_1(s)}{(s-s_1)^{r_1}(s-s_2)^{r_2}\ldots(s-s_p)^{r_p}}=$$

$=H_1(s)+H_2(s)\Leftrightarrow h(t)=h_1(t)+h_2(t).$

$y(t)=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)=y_1(t)+y_2(t).$

$|y(t)|\le|y_1(t)|+|y_2(t)|.$

Semnalul $y(t)$ este marginit daca semnalele $y_1(t)$ si $y_2(t)$ sunt marginite.

Marginirea lui $y_1(t)$

$$h_1(t)=\sum_{k=0}^{m-n} c_{m-n-k}\delta^{(k)}(t) \Rightarrow y_1(t)=x(t)*\sum_{k=0}^{m-n} c_{m-n-k}\delta^{(k)}(t)=\sum_{k=0}^{m-n} c_{m-n-k}\left[x(t)*\delta^{(k)}(t)\right]$$

Dar :

$$x(t)*\delta^{(k)}(t)=x'(t)*\delta^{(k-1)}(t)=\ldots=x^{(k)}(t) \Rightarrow y_1(t)=\sum_{k=0}^{m-n} c_{m-n-k}x^{(k)}(t)$$

$$|y_1(t)|=\left|\sum_{k=0}^{m-n} c_{m-n-k}x^{(k)}(t)\right| \le \sum_{k=0}^{m-n}|c_{m-n-k}|\left|x^{(k)}(t)\right|$$

Semnalul $y_1(t)$ este marginit daca atat semnalul $x(t)$ cat si primele sale $m-n$ derivate sunt marginite.

$x(t)=\sqrt{|t-t_0|}$ este marginit pe orice interval inchis care-l contine pe t_0.

$x'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{|t-t_0|}}\cdot\dfrac{|t-t_0|}{t-t_0}$ nemarginit in t_0.

Desi $x(t)$ este marginit $y_1(t)$ poate fi nemarginit.

Marginirea lui $x(t)$ asigura marginirea lui $y_1(t)$ doar daca $y_1(t)=c_{m-n}x(t)$ adica daca $m \le n$.

CONDITIE NECESARA DE STABILITATE:
Gradul numaratorului functiei de transfer sa fie mai mic sau egal decat gradul numitorului.

Marginirea lui $y_2(t)$

$$H_2(s)=\frac{A_{11}}{s-s_1}+\frac{A_{12}}{(s-s_1)^2}+\ldots+\frac{A_{1r_1}}{(s-s_1)^{r_1}}+$$

$$\frac{A_{21}}{s-s_2}+\frac{A_{22}}{(s-s_2)^2}+\ldots+\frac{A_{2r_2}}{(s-s_2)^{r_2}}+\ldots+$$

$$\frac{A_{p1}}{s-s_p}+\frac{A_{p2}}{(s-s_p)^2}+\ldots+\frac{A_{pr_p}}{(s-s_p)^{r_p}}$$

Daca $Re\{s\}>max\{Re\{s_1\},Re\{s_2\},\ldots,Re\{s_p\}\}$

sistemul cu raspunsul la impuls $h_2(t)$ este

cauzal si :

$$h_2(t)=\left(A_{11}e^{s_1t}+A_{12}te^{s_1t}+\ldots+A_{1r_1}t^{r_1-1}e^{s_1t}+\right.$$

$$+A_{21}e^{s_2t}+A_{22}te^{s_2t}+\ldots+A_{2r_2}t^{r_2-1}e^{s_2t}+\ldots$$

$$\left.A_{p1}e^{s_pt}+A_{p2}te^{s_pt}+\ldots+A_{pr_p}t^{r_p-1}e^{s_pt}\right)\sigma(t).$$

$$y_2(t)=x(t)*h_2(t)=A_{11}\left(e^{s_1t}\sigma(t)*x(t)\right)+A_{12}\left(te^{s_1t}\sigma(t)*x(t)\right)+\ldots+A_{1r_1}\left(t^{r_1-1}e^{s_1t}\sigma(t)*x(t)\right)+$$

$$+A_{21}\left(e^{s_2t}\sigma(t)*x(t)\right)+A_{22}\left(te^{s_2t}\sigma(t)*x(t)\right)+\ldots+A_{2r_2}\left(t^{r_2-1}e^{s_2t}\sigma(t)*x(t)\right)+\ldots+$$

$$A_{p1}\left(e^{s_pt}\sigma(t)*x(t)\right)+A_{p2}\left(te^{s_pt}\sigma(t)*x(t)\right)+\ldots+A_{pr_p}\left(t^{r_p-1}e^{s_pt}\sigma(t)*x(t)\right).$$

Deci : $|y_2(t)|\le\left|A_{11}\left(e^{s_1t}\sigma(t)*x(t)\right)\right|+\left|A_{12}\left(te^{s_1t}\sigma(t)*x(t)\right)\right|+\ldots+\left|A_{1r_1}\left(t^{r_1-1}e^{s_1t}\sigma(t)*x(t)\right)\right|+$

$$\left|A_{21}\left(e^{s_2t}\sigma(t)*x(t)\right)\right|+\left|A_{22}\left(te^{s_2t}\sigma(t)*x(t)\right)\right|+\ldots+\left|A_{2r_2}\left(t^{r_2-1}e^{s_2t}\sigma(t)*x(t)\right)\right|+\ldots+$$

$$\left|A_{p1}\left(e^{s_pt}\sigma(t)*x(t)\right)\right|+\left|A_{p2}\left(te^{s_pt}\sigma(t)*x(t)\right)\right|+\ldots+\left|A_{pr_p}\left(t^{r_p-1}e^{s_pt}\sigma(t)*x(t)\right)\right|.$$

Semnalul $y_2(t)$ este marginit daca fiecare termen din membrul drept este o functie marginita.

$$\left|\alpha t^le^{\beta t}\sigma(t)*x(t)\right|=\left|\alpha\int_0^\infty\tau^le^{\beta\tau}x(t-\tau)d\tau\right|\le|\alpha|\int_0^\infty\left|\tau^le^{\beta\tau}M\right|d\tau=M|\alpha|\int_0^\infty\tau^le^{\beta\tau}d\tau.$$

Pentru ca aceasta integrala sa fie marginita este suficient ca : $Re\{\beta\}<0.$

$y_2(t)$ este marginit daca $x(t)$ este marginit si daca $Re\{s_k\}<0,\ \forall k=\overline{1,p}$.

Functia de transfer $H(s)$ caracterizeaza un sistem strict stabil daca gradul numaratorului sau este mai mic sau egal decat gradul numitorului sau si daca toti polii sai se gasesc in semiplanul stang. Daca $H(s)$ are poli simpli pe axa imaginara sistemul este stabil in sens larg.
Consideratii asemanatoare pot fi facute si pentru sistemele in timp discret, rolul axei imaginare fiind luat in acest caz de conturul cercului unitate si rolul semiplanului stang revenind interiorului cercului unitate. Localizarea polilor functiei de transfer revine la rezolvarea ecuatiei Q = 0.
Daca gradul polinomului Q este mai mare decat 2, rezolvarea acestei ecuatii poate fi dificila. De aceea s - au elaborat criterii de stabilitate care sa permita localizarea polilor functiei de transfer fara a rezolva ecuatia.

Criterii de stabilitate algebrice

D1. Se numeste polinom strict Hurwitz, ploinomul $Q(s)$ cu coeficienti reali care are toate radacinile in semiplanul stang al planului complex.Daca are radacini simple pe axa imaginara atunci este un polinom Hurwitz in sens larg.
Daca polinomul are radacini simple atunci :

$$Q(s)=\prod_{i=1}^{p}(s-s_i)\prod_{l=1}^{q}\left(s^2+a_{1l}s+a_{2l}\right)$$

Daca $Q(s)$ este strict Hurwitz atunci toate radacinile sale sunt de parte reala negativa.

$s_i \in R_- \Rightarrow$ coeficientii monoamelor $s - s_i$ sunt strict pozitivi.

Radacinile ecuatiilor $s^2 + a_{1l}s + a_{2l} = 0$, sunt de forma : $\alpha_l \pm j\beta_l$.

Suma lor este $-a_{1l} = 2\alpha_l < 0$.

Produsul lor este $a_{2l} = \alpha_l^2 + \beta_l^2 > 0$.

Coeficientii binoamelor $s^2 + a_{1l}s + a_{2l}$ sunt strict pozitivi.

Toti coeficientii unui polinom strict Hurwitz sunt strict pozitivi. Toti coeficientii unui polinom Hurwitz in sens larg sunt pozitivi.

Aceste conditii nu sunt si suficiente.

Criteriul de stabilitate al lui Hurwitz

Conditia necesara si suficienta ca toate radacinile ecuatiei :

$$Q(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

sa aiba partea reala strict negativa este ca pentru $a_0 > 0$, toti determinantii minori principali in diagonala ai determinantului Δ_n sa fie strict pozitivi.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ 0 & . & . & . & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

Determinantul Δ_n are *n* linii si *n* coloane. Stricta pozitivitate a minorilor asigura stricta stabilitate a sistemului care are la numitorul functiei de transfer polinomul *Q(s).* Daca unul dintre minori este nul atunci sistemul este stabil in sens larg. Daca unul dintre minori este negativ atunci sistemul este instabil.

Exemplu

Se analizeaza stabilitatea sistemului descris de ecuatia diferentiala :

$\frac{d^5y(t)}{dt^5}+\frac{d^4y(t)}{dt^4}+7\frac{d^3y(t)}{dt^3}+4\frac{d^2y(t)}{dt^2}+10\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=2x(t)$ cu conditii initiale nule. Functia de transfer a sistemului este : $H(s)=\frac{2}{s^5+s^4+7s^3+4s^2+10s+3}$. Coeficientii polinomului $Q(s)$ sunt : $a_0=1, a_1=1, a_2=7, a_3=4, a_4=10$ si $a_5=3$. Coeficientii sunt strict pozitivi. Sistemul s-ar putea sa fie stabil. Se aplica criteriul lui Hurwitz. $n=5$.

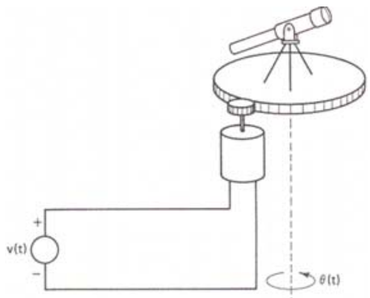
$$\Delta_5=\begin{vmatrix}1 & 4 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 7 & 10 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 7 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3\end{vmatrix}$$

Se calculeaza minorii principali in diagonala ai determinantului : $\Delta_1=1>0, \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 7\end{vmatrix}=3>0,$

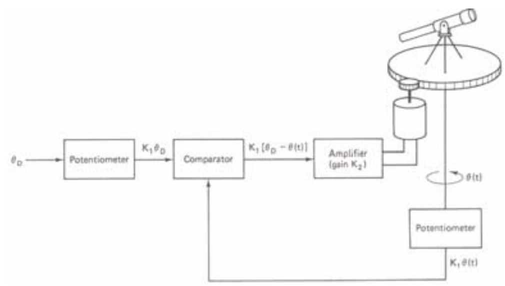
$$\Delta_3=\begin{vmatrix}a_1 & a_3 & a_5\\ a_0 & a_2 & a_4\\ 0 & a_1 & a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 1 & 7 & 10\\ 0 & 1 & 4\end{vmatrix}=\ldots=5>0, \Delta_4=\begin{vmatrix}1 & 4 & 3 & 0\\ 1 & 7 & 10 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 7 & 10\end{vmatrix}=\ldots=8>0. \Delta_5=\begin{vmatrix}1 & 4 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 7 & 10 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 7 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=3\Delta_4=24>0.$$

Deoarece $\Delta_k>0, \mathrm{k}=\overline{1,5}$, sistemul considerat este stabil.

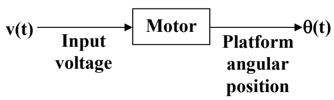
Analiza stabilitatii sistemelor cu reactie negativa



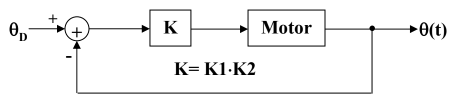
Motorul de curent continuu actioneaza platforma



Sistem cu reactie pentru fixarea telescopului.



Schema sistemului in bucla deschisa.



Schema sistemului in bucla inchisa.

Avantajele sistemelor in bucla inchisa

Insensibilitate la perturbatii,

Nu e necesar sa avem cunostinte amanuntite despre sistem.

Alte aplicatii ale sistemelor in bucla inchisa

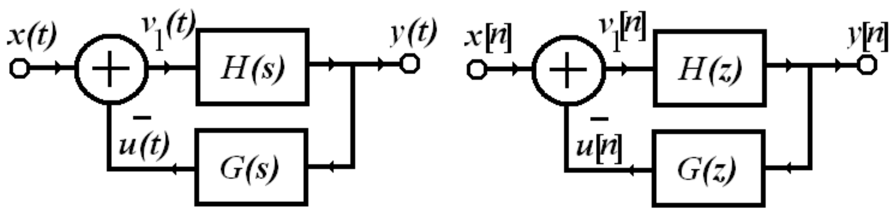
Controlul proceselor chimice,

Controlul temperaturii,

Sisteme aerospatiale.

Exemplu de sistem instabil, ce poate fi stabilizat prin reactie negativa.

Sisteme liniare cu reactie negativa



$V_1(s) = X(s) - U(s)$; $Y(s) = V_1(s)\cdot H(s)$; $U(s) = G(s)\cdot Y(s)$

Eliminand $U(s)$ si $V_1(s)$: $Y(s) = \left(X(s) - G(s)Y(s)\right)\cdot H(s)$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \left[1 - G(s)\frac{Y(s)}{X(s)}\right]\cdot H(s) \Rightarrow Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + H(s)G(s)} \; ; \; \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + H(z)G(z)}$$

Produsul $W(s) = H(s)G(s)$ reprezinta functia de transfer in bucla deschisa.

Sistemul in bucla deschisa este strict stabil daca radacinile ecuatiei $1 + W(s) = 0$ au partea reala strict negativa.

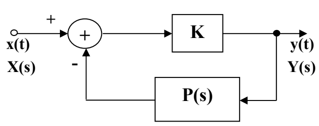
Cateva aplicatii si consecinte ale reactiei

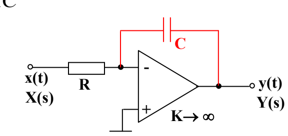
Sistemul invers

Cunoscand $P(s)$ *se doreste sintetizarea sistemului invers,* $1/P(s)$. $H(s)=K$ *si* $G(s)=P(s)$.

Functia de transfer a sistemului cu reactie este $Q(s)=\dfrac{K}{1+KP(s)}\overset{|KP(s)|\gg 1}{\cong}\dfrac{1}{P(s)}$ *O valoare mare a castigului* K *poate fi obtinuta cu ajutorul unui amplificator operational.*

Exemplu. Sistemul direct este un derivator implementat cu ajutorul unui condensator (curentul prin condensator este proportional cu derivata caderii de tensiune de pe condensator $P(s)=sC$ *). Sistemul invers trebuie sa fie un integrator,* $Q(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=-\dfrac{1}{sRC}$.





Compensarea unor caracteristici neideale ale unor elemente de circuit

Castig constant intr-o banda de frecvente pornind de la un amplificator cu $|H(\omega)|$ *variabil in acea banda. Pentru* $G(s)=K \Rightarrow Q(s)=\dfrac{H(s)}{1+KH(s)}\overset{s=j\omega}{\Rightarrow} Q(j\omega)=\dfrac{H(j\omega)}{1+KH(j\omega)}$

Daca in banda de frecvente de interes este satisfacuta conditia $|KH(j\omega)|\gg 1$ *atunci*

$$Q(j\omega)\equiv Q(\omega)\cong\frac{1}{K}=ct$$

Stabilizarea sistemelor instabile

$H(s)=\frac{b}{s-a}$, $a>0$. *Incluzand acest sistem intr-o bucla, cu* $G(s)=K$,

se obtine functia de transfer a sistemului cu reactie $Q(s)=\frac{H(s)}{1+KH(s)}=\frac{b}{s-(a-Kb)}$.

Polul sistemului cu reactie este $s_p=a-Kb$. *Acesta este situat in semiplanul stang daca* $Kb>a$. *In acest caz sistemul in bucla inchisa este stabil. Un astfel de sistem, la care marimea de reactie este proportionala cu marimea de iesire se numeste sistem cu reactie proportionala.*

Al doilea exemplu

Functia de transfer a oscilatorului are poli simpli situati pe axa imaginara.

$H(s)=\frac{b}{s^2+a}$. *Ca si in primul exemplu, in cazul unei reactii proportionale* $(G(s)=K)$ *se obtine un sistem in bucla inchisa cu functia de sistem* $Q(s)=\frac{b}{s^2+(a+Kb)}$.

Studiul sistemelor de ordinul 2, a caror functie de transfer generala este $Q_t(s)=\frac{\omega_0^2}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}$

a aratat ca ele sunt stabile daca $\omega_0>0$ *si daca* $\xi>0$, *adica daca exista atenuare.*

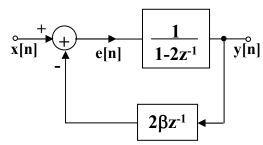
Analizand comparativ $Q(s)$ *si* $Q_t(s)$ *rezulta ca nu putem influenta prin reactie proportionala decat* ω_0^2 deoarece $\xi=0$. *Nu vom putea deci stabiliza oscilatorul numai prin reactie proportionala. De aceea includem in bucla de reactie si o componenta derivativa.* $G(s)=K_1+K_2s$. $Q(s)=\frac{b}{s^2+bK_2s+(a+K_1b)}$.

Sistemul in bucla inchisa este stabil daca $a+K_1b>0$ *si* $bK_2>0$.

Al treilea exemplu

$$H(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}\ G(z)=2\beta z^{-1}.\ Q(z)=\frac{H(z)}{1+G(z)H(z)}=\frac{1}{1-2(1-\beta)z^{-1}}$$

$z_p=2(1-\beta)$. *Stabilitatea se obtine daca* $\left|z_p\right|<1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\beta<1.$



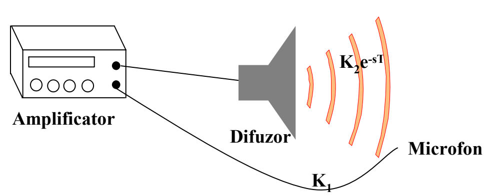
Instabilitati cauzate de reactie

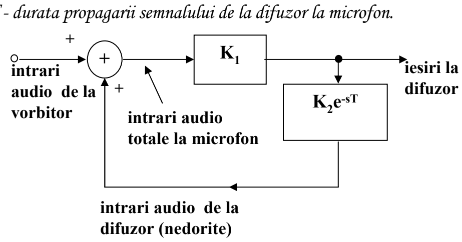
La microfon nu ajunge numai semnalul vocal ce provine de la vorbitor ci si un semnal nedorit de la difuzor. Apare astfel o bucla de reactie. Daca faza celor doua semnale este potrivita se produce intarirea sunetului generat de difuzor, pana la saturatia acestuia.

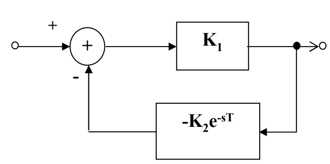
K_1 – *amplificarea,*

K_2 – *atenuarea datorata propoagarii sunetului prin aer.*

T - *durata propagarii semnalului de la difuzor la microfon.*







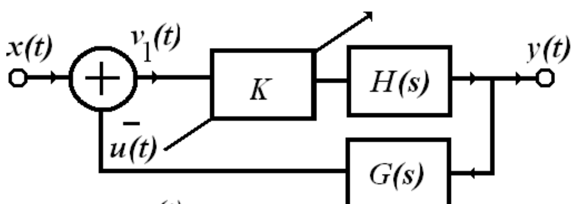
$Q(s)=\frac{K_1}{1-K_1K_2e^{-sT}} \Rightarrow 1-K_1K_2e^{-sT}=0 \Leftrightarrow e^{sT}=K_1K_2 \Leftrightarrow (s>0 \Rightarrow K_1K_2>1$ - *conditie de instabilitate*$)$.

Pe masura ce distanta dintre difuzor si microfon creste, atenuarea datorata aerului creste si deci K_2 *scade, sistemul putand deveni stabil.*

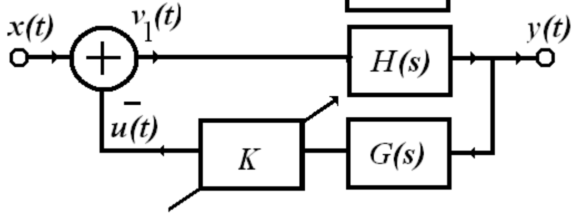
Criteriul de stabilitate Nyquist

Utilizarea criteriului de stabilitate Hurwitz presupune cunoasterea expresiei functiei de transfer in bucla inchisa a sistemului cu reactie. Exista situatii cand aceasta functie de transfer nu este cunoscuta. De exemplu in cazul identificarii experimentale a unui sistem cu reactie, cand pot fi identificate doar raspunsurile in frecventa H si G. In aceste cazuri poate fi folosit criteriul lui Nyquist.

Sisteme cu reactie cu castig variabil



$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{KH(s)}{1+KH(s)G(s)}$$



$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H(s)}{1+KH(s)G(s)}$$

Localizarea polilor functiei de transfer in bucla inchisa presupune rezolvarea ecuatiei

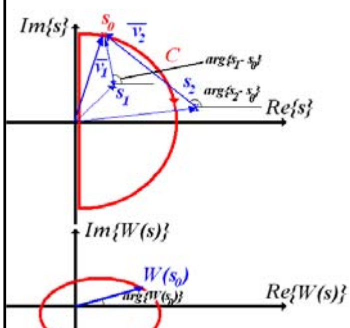
$$H(s)\cdot G(s)=-\frac{1}{K}$$

Solutiile ecuatiei $H(s) \cdot G(s) = -\frac{1}{K}$ depind de valoarea lui K.

Pot fi determinate valori ale lui K pentru care sistemul cu reactie sa fie stabil. Pe baza criteriului lui Nyquist pot fi determinate aceste valori prin examinarea functiei $G(j\omega)H(j\omega)$. Reprezentarea grafica in planul s a acestei functii poarta numele de hodograf al lui $W(s)$.

In scopul formularii criteriului lui Nyquist se enunta in prealabil principiul variatiei argumentului, care da informatii despre hodograful unei functii complexe de variabila complexa.

Principiul variatiei argumentului



Cand conturul C este parcurs in sens orar valorile functiei $W(s)$ parcurg conturul corespunzator.

Daca, de exemplu: $W(s) = K(s - s_1)(s - s_2)$

si $K > 0$: $arg\{W(s_0)\} = arg\{s_0 - s_1\} + arg\{s_0 - s_2\}$

Se estimeaza valoarea variatiei lui $arg\{W(s_0)\}$ cand s parcurge odata conturul C. Vectorul $\overline{v_1}$ se roteste complet in jurul originii. Variatia unghiului pe care il face cu axa reala este de -2π. La parcurgerea completa a conturului C variatia unghiului format de $\overline{v_2}$ cu axa reala este nula. Deci la o parcurgere completa a conturului C de catre s variatia argumentului lui $W(s)$ este de -2π.

$W(s) = K(s-s_1)^2(s-s_2) \Rightarrow arg\{W(s)\} \overset{K>0}{=} 2\,arg\{s-s_1\} + arg\{s-s_2\}$

Cand s parcurge odata conturul C in sens orar argumentul lui $W(s)$ variaza cu -4π. In general, daca in interiorul conturului C se gaseste un zero al lui $W(s)$ cu ordinul de multiplicitate m_1 atunci contributia acestuia la variatia argumentului lui $W(s)$ este de -2m_1π. De aceea $W(s)$ inconjoara de m_1 ori originea planului $\left(Re\{W(s)\}, Im\{W(s)\}\right)$.

$W(s) = K(s-s_1)^{m_1}(s-s_2)^{m_2}\ldots(s-s_p)^{m_p}(s-s_{p+1})^{m_{p+1}}(s-s_{p+2})^{m_{p+2}}\ldots(s-s_n)^{m_n}$

$s_1, s_2, \ldots s_p$ in interiorul conturului C iar $s_{p+1}, s_{p+2}, \ldots s_n$ in exteriorul sau.

Cand s parcurge odata conturul C in sens orar argumentul lui $W(s)$ variaza cu -2π$\left(m_1 + m_2 + \ldots + m_p\right)$ si $W(s)$ inconjoara de $m_1 + m_2 + \ldots + m_p$ ori originea planului $\left(Re\{W(s)\}, Im\{W(s)\}\right)$ in sens orar.

$W(s)=\dfrac{K}{(s-s_1)(s-s_2)}$, s_1 in interiorul conturului C iar s_2 in exteriorul sau.

$arg\{W(s)\}=-arg\{s-s_1\}-arg\{s-s_2\}=-arg\{\overline{v_1}\}-arg\{\overline{v_2}\}$

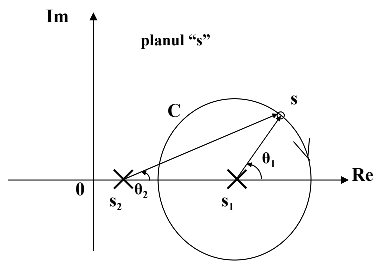
$\Delta\left(arg\{\overline{v_1}\}\right)=-2\pi$; $\Delta\left(arg\{\overline{v_2}\}\right)=0$; $\Delta\left(arg\{W(s)\}\right)=2\pi$;

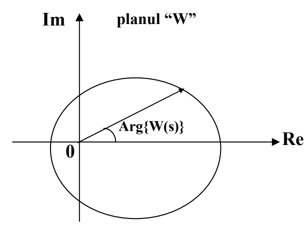
$W(s)=\dfrac{K}{(s-s_1)^2(s-s_2)}$; $\Delta\left(arg\{W(s)\}\right)=4\pi$

$$W(s)=\frac{K}{(s-s_1)^{n_1}(s-s_2)^{n_2}\dots(s-s_p)^{n_p}(s-s_{p+1})^{n_{p+1}}\dots(s-s_q)^{n_q}}$$

$s_1, s_2, \dots s_p$ in interiorul conturului C iar $s_{p+1}, s_{p+2},\dots s_q$ in exteriorul sau.

$\Delta\left(arg\{W(s)\}\right)=2\pi(n_1+n_2+\dots+n_p)$.





Enunt

$$W(s)=\frac{K\left(s-s_{z_1}\right)^{m_1}\left(s-s_{z_2}\right)^{m_2}\dots\left(s-s_{z_q}\right)^{m_q}\left(s-s_{z_{q+1}}\right)^{m_{q+1}}\dots\left(s-s_{z_r}\right)^{m_r}}{\left(s-s_{p_1}\right)^{n_1}\left(s-s_{p_2}\right)^{n_2}\dots\left(s-s_{p_t}\right)^{n_t}\left(s-s_{p_{t+1}}\right)^{n_{t+1}}\dots\left(s-s_{p_u}\right)^{n_u}}$$

$s_{z_1}, s_{z_2}, \dots, s_{z_q}$ si $s_{p_1}, s_{p_2}, \dots s_{p_t}$ in interiorul conturului C iar restul radacinilor in exteriorul sau.

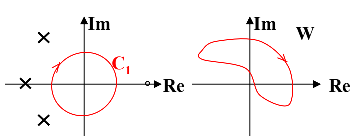
La o parcurgere completa a conturului C in sens trigonometric variatia argumentului lui $W(s)$ este de $2\pi\left(n_1+n_2+\dots+n_t-m_1-m_2-\dots-m_q\right)$ si deci $W(s)$ se roteste in jurul originii planului $\left(Re\{W(s)\}, Im\{W(s)\}\right)$ de $n_1+n_2+\dots+n_t-m_1-m_2-\dots-m_q$ ori, in sens orar.

Atunci cand un contur inchis C, din planul s, este parcurs o singura data in sens orar, hodograful fractiei rationale $W(s)$ inconjoara originea in sens orar de un numar de ori egal cu numarul de zerouri minus numarul de poli ai lui $W(s)$ din interiorul conturului C. In numarare, polii si zerourile se vor considera cu tot cu ordinul lor de multiplicitate.

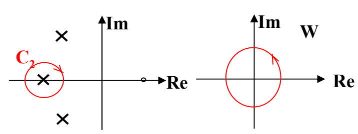
Daca unul dintre zerourile lui $W(s)$ se gaseste pe conturul C atunci acesta contribuie la variatia argumentului lui $W(s)$ cu -π. Daca unul dintre polii lui $W(s)$ se gaseste pe conturul C atunci acesta contribuie la variatia argumentului lui $W(s)$ cu π.

Exemplu

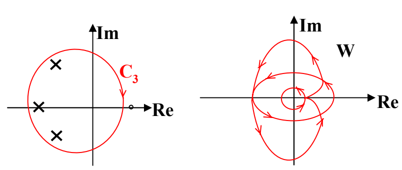
$$W(s)=\frac{s-1}{(s+1)\left(s^2+s+1\right)} \text{ cu zeroul } \beta_1=1 \text{ si polii } \alpha_1=-1,\ \alpha_2=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2},\ \alpha_3=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



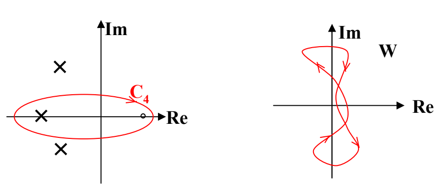
a) nu exista poli sau zerouri in interior si deci nu se inconjoara originea de catre W.



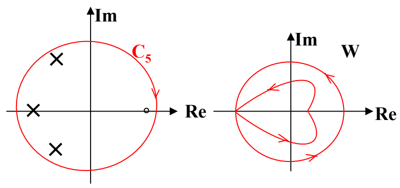
b) exista un pol in interior si W inconjoara originea o data, in sens antiorar.



c) exista trei poli in interiorul conturului C si W inconjoara originea de 3 ori, in sens antiorar.

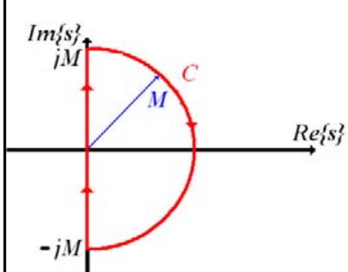


d) exista un pol si un zero in interiorul conturului C. W nu inconjoara originea, diferenta dintre nr. de zerouri si cel de poli fiind nula.



e) exista trei poli si un zerou in interiorul conturului C. W inconjoara originea de 2 ori, in sens antiorar, deoarece nr. zerouri-nr. poli=-2.

Pentru ca sistemul in bucla inchisa sa fie stabil este necesar ca toate radacinile ecuatiei $1+KH(s)G(s)=0$ sa aiba partea reala negativa. Functia $R(s)=\frac{1}{K}+H(s)G(s)$ nu trebuie sa aiba zerouri in semiplanul drept. Numarul zerourilor din semiplanul drept poate fi determinat cu ajutorul criteriului variatiei argumentului.



Cand $M \to \infty$ conturul C incercuieste semiplanul drept si include si axa imaginara. Pentru portiunea din conturul C ocupata de axa imaginara $R(s)$ se transforma in $R(j\omega)$ cu ω modificandu-se intre -∞ si ∞, adica in hodograful lui $R(s)$. Considerand ca $R(s)$ este o functie rationala cu gradul numaratorului mai mic sau egal decat gradul numitorului :

$$\lim_{|s|\to\infty} R(s) = \text{constant}$$

Valoarea lui $R(s)$ este constanta pe portiunea semicirculara a conturului C care inconjuara semiplanul drept.
Pentru reprezentarea lui $R(s)$, cand s parcurge conturul C este suficienta reprezentarea hodografului $R(j\omega)$.

$R(j\omega) = \frac{1}{K} + G(j\omega) \cdot H(j\omega)$. Pentru reprezentarea hodografului $R(j\omega)$ este suficienta reprezentarea hodografului $G(j\omega) \cdot H(j\omega)$. Conturul C incercuieste toate zerourile lui $R(s)$ din semiplanul drept. Reprezentand grafic hodograful lui $R(s)$ se poate determina de cate ori incercuieste el originea planului $\left(Re\{R(s)\}, Im\{R(s)\}\right)$. Polii lui $R(s)$ sunt identici cu polii lui $H(s)G(s)$. $R(j\omega) - \frac{1}{K} = G(j\omega)H(j\omega)$. Daca $R(j\omega)$ inconjuara originea de un anumit numar de ori atunci $G(j\omega)H(j\omega)$inconjoara punctul de coordonate $\left(-\frac{1}{K}, 0\right)$ de acelasi numar de ori si in acelasi sens.

$G(j\omega) \cdot H(j\omega)$ cu ω modificandu-se de la -∞ la ∞ - hodograf Nyquist al sistemului in bucla deschisa.

$R(s)$ nu trebuie sa aiba zerouri in semiplanul drept sau pe axa imaginara pentru ca sistemul in bucla inchisa sa fie stabil. De aceea hodograful Nyquist trebuie sa inconjoare punctul de coordonate $\left(-\frac{1}{K}, 0\right)$ in sens anti-orar de un numar de ori egal cu $n_i + \frac{n_C}{2}$.

n_i - numarul polilor din semiplanul drept ai lui $H(s)G(s)$,

n_C - numarul polilor de pe axa imaginara ai lui $H(s)G(s)$.

Enuntul criteriului de stabilitate Nyquist

Conditia necesara si suficienta ca sistemul in bucla inchisa considerat sa fie strict stabil este ca numarul de incercuiri ale punctului de coordonate $\left(-\frac{1}{K},0\right)$ de catre hodograful Nyquist al sistemului in bucla deschisa $H(j\omega)G(j\omega)$ in sens antiorar cand ω se modifica de la -∞ la ∞, sa fie egal cu numarul polilor lui $H(s)G(s)$ din semiplanul drept si de pe axa imaginara, adica cu $n_i+\frac{n_C}{2}$.

Observatii

1. Daca sistemul in bucla deschisa este stabil atunci $H(s)G(s)$ nu are poli in semiplanul drept si nici pe axa imaginara. Deci hodograful Nyquist al sistemului in bucla deschisa nu trebuie sa incercuiasca punctul de coordonate $\left(-\frac{1}{K},0\right)$.

2. Deoarece $h(t)$ si $g(t)$ sunt functii reale $H(-j\omega)G(-j\omega)=H(j\omega)^*G(j\omega)^*$ si deci $\left|H(-j\omega)G(-j\omega)\right|=\left|H(j\omega)^*G(j\omega)^*\right|=\left|H(j\omega)^*\right|\left|G(j\omega)^*\right|=\left|H(j\omega)G(j\omega)\right|$

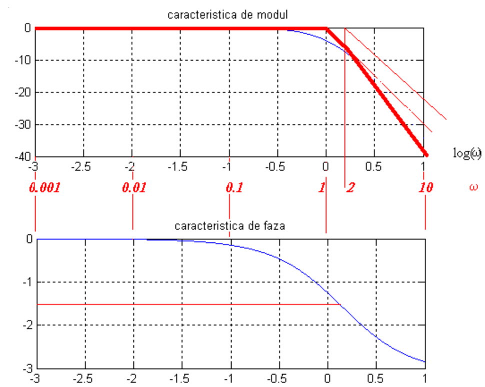
si $arg\{H(-j\omega)G(-j\omega)\}=arg\left\{H(j\omega)^*G(j\omega)^*\right\}=arg\left\{\left(H(j\omega)G(j\omega)\right)^*\right\}=$

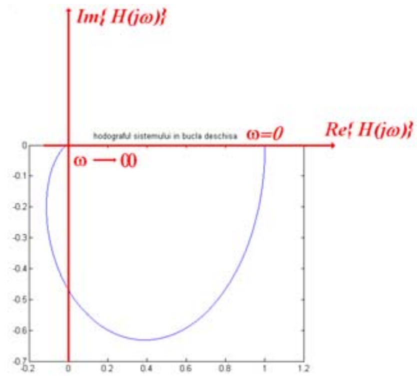
$=-arg\{H(j\omega)G(j\omega)\}$

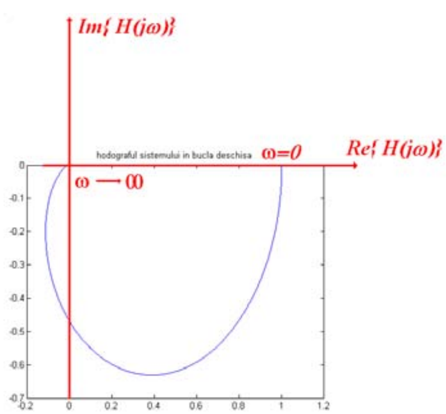
Hodograful Nyquist pentru domeniul de variatie a lui ω intervalul $(-\infty,0)$ se obtine prin simetrie fata de axa reala a planului complex $H(s)G(s)$ din hodograful Nyquist pentru domeniul de variatie a lui ω cuprins in intervalul $(0,\infty)$.

Exemple

1. $G(s)=\frac{1}{s+1}$; $H(s)=\frac{1}{0,5s+1}$. Exista doua modalitati de constructie a hodografului sistemului in bucla deschisa. Prima se bazeaza pe caracteristicile Bode ale sistemului in bucla deschisa iar cea de a doua foloseste valorile $|H(\omega)G(\omega)|$ si $arg\{H(\omega)G(\omega)\}$ sau valorile $Re\{H(\omega)G(\omega)\}$ si $Im\{H(\omega)G(\omega)\}$.







Deoarece sistemul in bucla deschisa este stabil pentru ca si sistemul in bucla inchisa sa fie stabil este necesar ca sa nu fie incercuit punctul de coordonate $\left(-\frac{1}{K},0\right)$.

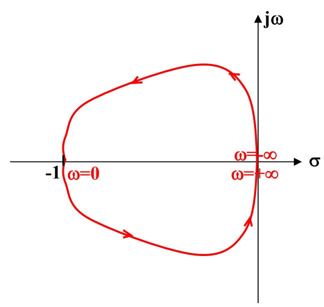
$-\frac{1}{K}<0$ sau $-\frac{1}{K}>1$

$K>0$ sau $K>-1$ adica $K>-1$.

2. *Un sistem in bucla deschisa instabil, avand un pol in semiplanul drept:*

$$G(s)H(s) = \frac{2(s+1)}{(s-1)(s+2)}$$

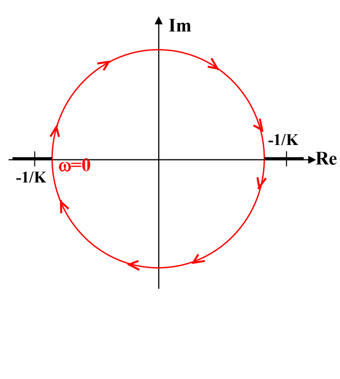
Pentru ca sistemul in bucla inchisa sa fie stabil este necesar ca punctul critic $\sigma = -1/K$ *sa fie inconjurat de hodograf o singura data, in sens invers acelor de ceasornic. Acest lucru se obtine daca:* $-1 < -1/K < 0$*, ceea ce inseamna* $K > 0$ *si* $K > 1$*, adica* $K > 1$.



3. Ne reintoarcem la exemplul sistemului acustic. Fie $K = K_1 K_2$ *si* $G(s)H(s) = -e^{-sT} = e^{-(st+j\pi)}$.

$G(j\omega)H(j\omega) = e^{-j(\omega T+\pi)}$. *Modulul este unitar iar argumentul are expresia* $-(\omega T + \pi)$.

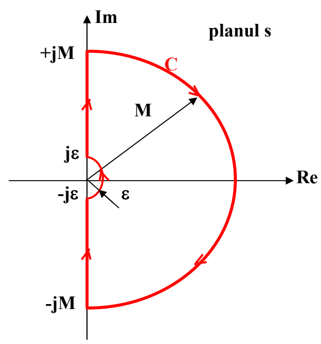
Deoarece sistemul in bucla deschisa este stabil, hodograful Nyquist nu are voie sa incercuiasca punctul critic $-1/K$*, sau* $|K| < 1$. *Deoarece* K_1 *si* K_2 *au semnificatia de atenuari acustice, sunt pozitive Sistemul in bucla deschisa este stabil daca* $K_1 K_2 < 1$.



Cazul polilor sistemului in bucla deschisa situati pe axa imaginara

Consideram cazul unui pol pe axa imaginara. $G(s)H(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$.

Pentru a aplica criteriul variatiei argumentului la fel ca in cazurile anterioare se considera conturul C, modificat, in asa fel incat sa fie ocolit polul de pe axa imaginara, printr - un semicerc de raza $\varepsilon \to 0$, in acelasi timp cu $M \to \infty$.



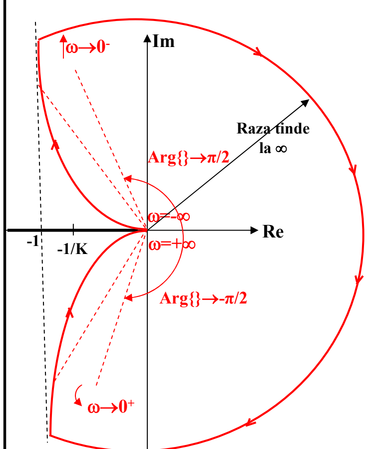
Valoarea produsului GH pe cercul de raza M este o constanta si deci nu apare nici o variatie a argumentului cand ω trece de la ∞ la - ∞. Trebuie deci sa trasam hodograful Nyquist numai pentru axa imaginara si pentru semicercul de raza ε. Avem :

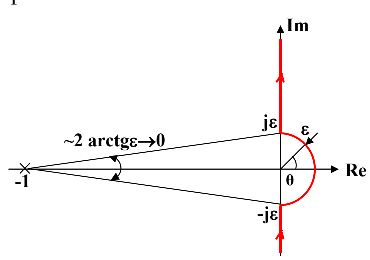
$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{1}{j\omega(j\omega+1)}=\frac{1}{|\omega|\sqrt{\omega^2+1}}e^{-j\left(\frac{\pi}{2}sgn\,\omega+arctg\omega\right)}$$

si $\lim\limits_{j\omega\to 0} Re\{G(j\omega)H(j\omega)\}=-1$, adica $\sigma=-1$ este asimptota verticala a hodografului Nyquist.

Ramane sa determinam comportarea produsului pe semicercul de raza ε.

Deoarece raza ε tinde spre zero, variatia unghiului cauzata de polul - 1 este nula.

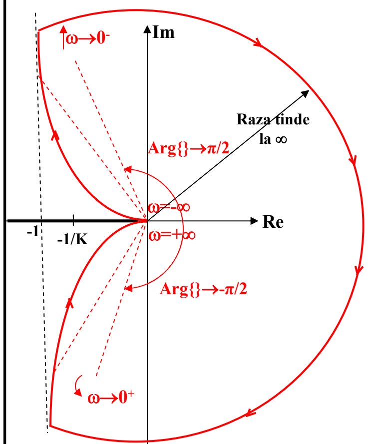




In schimb pe semicerc $Arg\{G(j\omega)H(j\omega)\}=-\theta$ si deci

$$\Delta Arg\{G(j\omega)H(j\omega)\}=-\left(\theta_{\omega=0_+}-\theta_{\omega=0_-}\right)=-\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

sau $\Delta Arg\{G(j\omega)H(j\omega)\}=-\pi$. Aceasta inseamna o rasucire a hodogrfului cu 180° in sens orar atunci cand se trece de la $\omega=0^-$ la $\omega=0^+$ pe semicercul de raza ε.



Pentru a determina valorile admise pentru castigul K, vom face mentiunea ca in interiorul conturului C considerat nu se afla nici macar polul din origine, deoarece l-am lasat in afara, ocolindu-l prin dreapta cu semicercul de raza ε. In consecinta punctul critic nu trebuie sa fie inconjurat de hodograf, pentru a avea stabilitatea sistemului in bucla inchisa.

Rezulta ca trebuie sa avem $-\dfrac{1}{K} < 0$ sau $K > 0$.

Cazul sistemelor in timp discret

Pentru ca sistemul in timp discret in bucla inchisa sa fie stabil este necesar ca nici un zero al ecuatiei : $R(z) = \dfrac{1}{K} + G(z)H(z) = 0$ sa nu fie in afara cercului unitate.

Fie : $\hat{R}(z) = R\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

Daca z_0 este un zero (pol) al lui $R(z)$ atunci $\dfrac{1}{z_0}$ este un zero (pol) al lui $\hat{R}(z)$.

Daca $|z_0| > 1$ atunci $\dfrac{1}{|z_0|} < 1$. Orice zero (pol) al lui $R(z)$ din exteriorul cercului unitate este un zero (pol) al lui $\hat{R}(z)$ situat in interiorul cercului unitate.

Conform principiului variatiei argumentului daca z parcurge odata cercul unitate in sens orar atunci $\hat{R}(z)$ incercuieste originea planului $\left(Re\left\{\hat{R}(z)\right\}, Im\left\{\hat{R}(z)\right\}\right)$ in sens orar de un numar de ori egal cu diferenta dintre numarul de zerouri si de poli ai lui $\hat{R}(z)$ situati in interiorul cercului unitate.

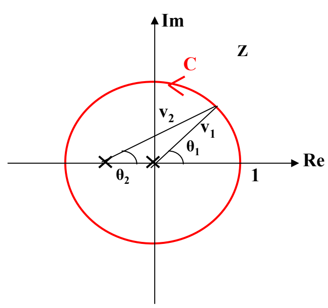
Pe cercul unitate $z = e^{j\Omega}$ si $\dfrac{1}{z} = e^{-j\Omega}$. De aceea $\hat{R}\left(e^{j\Omega}\right) = R\left(e^{-j\Omega}\right)$.

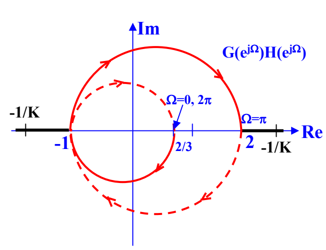
Evaluarea lui $\hat{R}(z)$, cand z parcurge odata cercul unitar in sens orar, este identica cu evaluarea lui $R(z)$, cand z parcurge odata cercul unitar in sens antiorar.

Enuntul criteriului lui Nyquist pentru sisteme in timp discret

Conditia necesara si suficienta pentru ca sistemul in bucla inchisa sa fie stabil este ca numarul de incercuiri in sens antiorar ale punctului de coordonate $\left(-\frac{1}{K},0\right)$ de catre hodograful Nyquist al lui $G\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)$ cand Ω se modifica de la 0 la 2π trebuie sa fie egal cu numarul polilor lui $H(z)G(z)$ care se gasesc in exteriorul cercului unitate.

Exemple



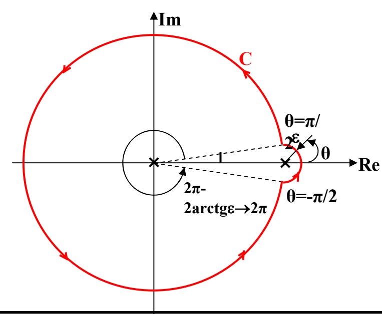


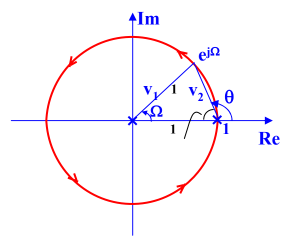
1. $G(z)H(z)=\frac{z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{1}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)}\Rightarrow G\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{e^{j\Omega}\left(e^{j\Omega}+\frac{1}{2}\right)}=$

$=\frac{1}{v_1 v_2}e^{-j(\theta_1+\theta_2)}=\frac{1}{v_2}e^{-j(\theta_1+\theta_2)}$. Valorile maxima si minima ale lui v_2 sunt 3/2 si 1/2 si se obtin pentru $\Omega=0$ si $\Omega=\pi$, respectiv. Ca atare la $\Omega=0$, $2\pi\left|G\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)\right|=2$. Deoarece $Arg\left\{G\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)\right\}=-(\theta_1+\theta_2)$ sensul de parcurgere al hodografului este cel orar, valoarea maxima a argumentului fiind -4π, ceea ce inseamna ca se inconjuara originea de 2 ori. Cum sistemul in bucla deschisa este stabil, rezulta ca pentru ca si sistemul inchisa sa fie stabil, punctul critic $-1/K$ nu trebuie sa fie inconjurat de hodograful Nyquist. In consecinta, $-\frac{1}{K}<-1$ sau $-\frac{1}{K}>2$ de unde $0<K<1$ sau $-\frac{1}{2}<K<0$. In concluzie sistemul in bucla inchisa ramane stabil pentru $K\in\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup(0,1)$.

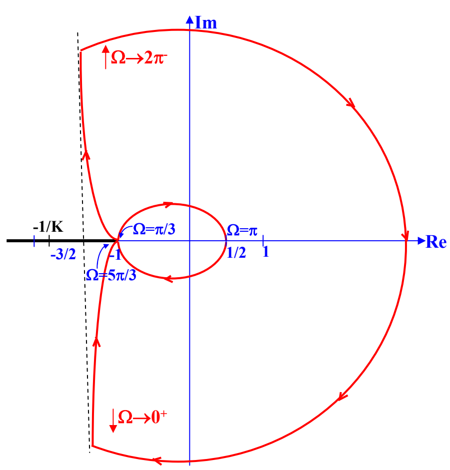
2. Un pol al sistemului in bucla deschisa pe cercul unitate. $G(z)H(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$. Se modifica conturul cercului unitar, C, adaugand un semicerc de raza $\varepsilon \to 0$, care lasa polul in interiorul cercului unitar.

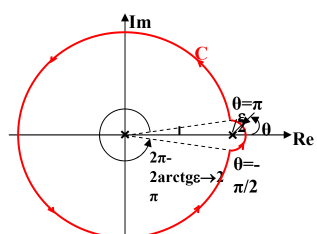
$G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})=\dfrac{1}{v_1 v_2}e^{-j(\Omega+\theta)} \Rightarrow \left|G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})\right|=\dfrac{1}{v_2}$ si $Arg\{G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})\}=-(\Omega+\theta)$. La $\Omega=\pi/3$ $v_2=1$ si deci modulul este egal cu 1. De asemenea $\theta=2\pi/3$ si $Arg\{G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})|_{\Omega=\pi/3}\}=-\pi$. Pentru $\Omega=\pi \Rightarrow \theta=\pi \Rightarrow Arg\{G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})|_{\Omega=\pi}\}=-2\pi$ si $v_2=2 \Rightarrow$ modulul este 1/2. $Re\{G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})\}=$ $\dfrac{cos^2\Omega - sin^2\Omega - cos\Omega}{2(1-cos\Omega)} \Rightarrow \lim_{\Omega\to 0} Re\{G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})\} \overset{l'Hospital}{=} \lim_{\Omega\to 0}\dfrac{1-4cos\Omega}{2}=-\dfrac{3}{2}$. $x=-\dfrac{3}{2}$ este asimptota verticala la hodograful Nyquist.

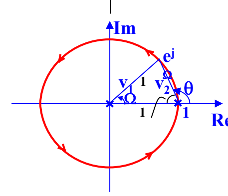




Cand parcurgem semicercul $\varepsilon \to 0$ in sens orar, θ creste de la $-\dfrac{\pi}{2}$ la $\dfrac{\pi}{2}$ asa ca argumentul sufera o variatie $\Delta Arg\{G(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})\}\Big|_{\Omega\to 0}=-\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\pi$, ceea ce inseamna ca hodograful inconjoara originea pe la infinit, in sens orar, atunci cand Ω trece de la $2\pi^-$ la 0^+. Pentru ca sistemul in bucla inchisa sa ramana stabil, trebuie sa avem $-\dfrac{1}{K}<-1$ sau $0<K<1$.

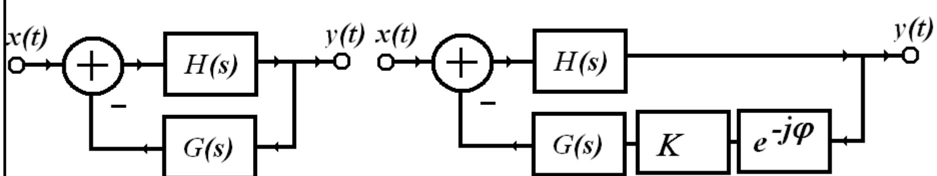






Marginile de amplificare si de faza

Uneori este interesant sa se stie, pentru un sistem stabil, in ce masura poate fi modificata amplificarea sistemului si ce defazaj suplimentar poate fi introdus in sistem in asa fel incat el sa ramana stabil.



Se numeste margine de amplificare a sistemului din stanga, valoarea minima a lui K pentru care sistemul din dreapta, pentru $\varphi = 0$ devine instabil.
Se numeste margine de faza a sistemului din stanga, valoarea minima a lui $\varphi,$ pentru $K = 1,$ pentru care sistemul din dreapta devine instabil.

$$1 + H\left(e^{j\omega}\right) \cdot G\left(e^{j\omega}\right) \cdot K \cdot e^{-j\varphi} = 0$$

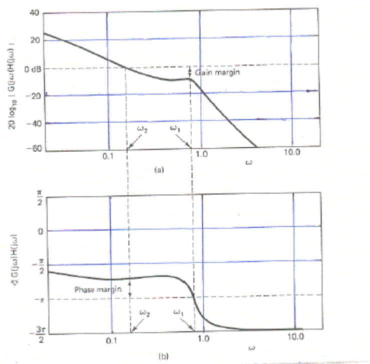
Prin modificarea lui K sau a lui φ unul dintre polii functiei de transfer in bucla inchisa poate ajunge pe axa imaginara, in punctul $j\omega_0$:

$$Ke^{-j\varphi} H\left(j\omega_0\right) G\left(j\omega_0\right) = -1$$

Exemplu. $G(s)H(s)=\dfrac{4\left(1+\frac{1}{2}s\right)}{s(1+2s)\left[1+0,05s+(0,125s)^2\right]}$.

Deoarece sistemul in bucla deschisa este stabil, pentru ca sistemul in bucla inchisa sa ramana stabil este necesar ca punctul critic sa ramana in exteriorul hodografului. Rezerva de amplificare va fi distanta, pe axa reala, de la puctul critic la intersectia hodografului cu axa reala negativa. Pentru $\varphi = 0$, ecuatia devine: $K|G(j\omega_0)H(j\omega_0)|e^{jArg\{G(j\omega_0)H(j\omega_0)\}}=-1$.

Deoarece primii 2 factori din membrul stang sunt pozitivi este necesar ca exponentiala complexa sa fie negativa. Fie ω_1 frecventa la care: $e^{jArg\{G(j\omega_1)H(j\omega_1)\}}=-1 \Leftrightarrow Arg\{G(j\omega_1)H(j\omega_1)\}=-\pi$. La frecventa ω_1 are loc intersectia hodografului cu axa reala negativa. Rezerva de amplificare este $K=\dfrac{1}{|G(j\omega_1)H(j\omega_1)|}$.



Fie ω_2 frecventa la care $|G(j\omega_2)H(j\omega_2)|=1$.

Rezerva de faza va fi: $\varphi=\pi-Arg\{G(j\omega_2)H(j\omega_2)\}$.