Caracterizarea Statistică a Semnalelor Aleatoare Ergodice şi Staționare

1. Scopul lucrării

În lucrare se studiază caracteristicile statistice: funcția de repartiție, densitatea de probabilitate, precum şi mărimile caracteristice, cum sunt valoarea medie şi dispersia unor semnale aleatoare.

2. Semnale aleatoare: noțiuni de bază

Un semnal este o funcție de timp ce poarta informație utilă pentru o aplicație.

Semnalele ce pot fi modelate prin funcții (distribuții) se numesc semnale deterministe. Cunoscând funcția ce modelează semnalul putem, în principiu, cunoaşte valoarea semnalului în orice moment de timp, orice nedeterminare fiind astfel înlăturată.

O altă categorie de semnale este reprezentată de semnalele aleatoare, pentru care nu se poate scrie o lege de variație temporală de tip funcție, ca urmare a variației lor haotice (aleatoare, întâmplătoare). Cunoscând o valoare a semnalului aleator la un moment de timp t dat, se poate spune, cu o anumită probabilitate, în ce interval de valori va fi cuprinsă valoarea semnalului la un moment de timp ulterior $t+t_0$.

3. Caracterizarea Statistică a Semnalelor Aleatoare Ergodice şi Staționare

Se numeşte funcție de distribuție (cumulativă) (CDF – Cumulative Distribution Function) unidimensională a semnalului aleator $\phi(t)$ față de nivelul x la momentul t_1 şi se notează $F_\phi(x,t_1)$, probabilitatea ca $\phi(t_1)$ să fie mai mic sau egal cu x :

$$F_\phi(x,t_1) = p\{\phi(t_1) \le x\} \tag{1}$$

Se numeşte densitate de probabilitate unidimensională a semnalului aleator $\phi(t)$ faţă de nivelul x la momentul t_1 şi se notează cu $p_\phi(x,t_1)$, mărimea:

$$p_\phi(x,t_1) = \frac{\partial F_\phi(x,t_1)}{\partial x} \tag{2}$$

Conform definițiilor lor, funcția de repartiție şi densitatea de probabilitate depind de momentul t_1 la care se calculează, precum şi de nivelul x, în raport cu care se calculează.

Funcțiile $F_\phi(x,t_1)$ şi $p_\phi(x,t_1)$ sunt cele mai simple caracteristici statistice ale semnalelor aleatoare şi sunt utilizabile doar la momentul impus, t_1.

Semnalele aleatoare pot fi complet caracterizate statistic cu ajutorul funcției de repartiție n-dimensionale.

Cu ajutorul funcțiilor $F_\phi(x,t_1)$ şi $p_\phi(x,t_1)$ pot fi calculate şi anumite caracteristici numerice ale semnalelor aleatoare, ca de exemplu: valoarea medie statistică a semnalului aleator, $\mu_{\phi(t)}$ sau dispersia sa, $\sigma^2_{\phi(t)}$ (cu E se noteaza speranța matematică (expectation)).

$$\mu_{\phi(t)} = E\{\phi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_1(x,t)dx \tag{3}$$

$$\sigma^2_{\phi(t)} = E\left\{\left[\phi(t) - \mu_{\phi(t)}\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mu_{\phi(t)}\right)^2 \cdot p_1(x,t)dx \tag{4}$$

În cazul semnalelor aleatoare staționare, densitatea de probabilitate unidimensională față de nivelul x nu depinde de timp:

$$p_\phi(x,t) = p_\phi(x)$$

În cazul semnalelor aleatoare ergodice, media temporală a unei realizări coincide cu media statistică calculată pe ansamblul realizărilor, în orice moment.

Pentru semnalele aleatoare staționare, funcția de repartiție are următoarele proprietăți:

$$F_\phi(-\infty) = 0 \tag{5}$$

$$F_\phi(\infty) = 1 \tag{6}$$

$$p\{x_1 < \phi \le x_2\} = F_\phi(x_2) - F_\phi(x_1) \tag{7}$$

$$x_2 \geq x_1 \Rightarrow F_\phi(x_2) \geq F_\phi(x_1) \tag{8}$$

Densitatea de probabilitate a acestor semnale poate fi aproximată astfel:

$$\begin{aligned} p_\phi(x) &= \frac{dF_\phi(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_\phi(x+\Delta x) - F_\phi(x)}{\Delta x} \overset{(7)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p\{x < \phi \leq x + \Delta x\}}{\Delta x} = \\ &= \frac{p\{x < \phi \leq x + \Delta x\}}{\Delta x} \end{aligned} \tag{9}$$

În fig. 1 este reprezentată realizarea $\phi^{(k)}(t)$ de durată T a unui semnal aleator $\phi(t)$.

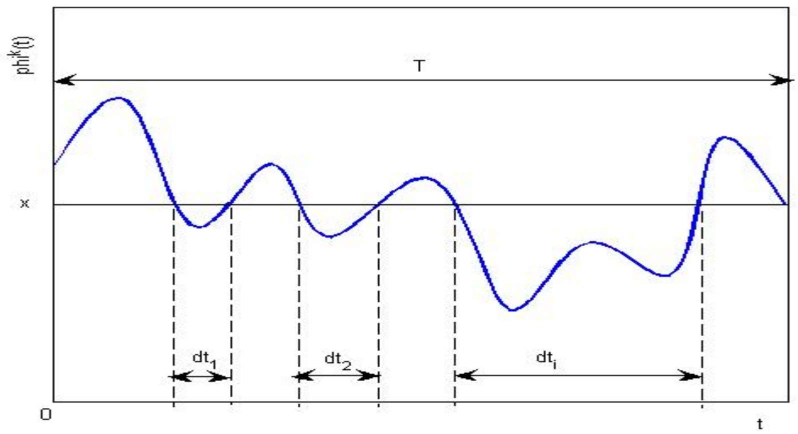

Figure 1

Se numeşte timp mediu în care realizarea $\phi^{(k)}(t)$ a semnalului aleator se găseşte sub pragul x şi se notează cu $\nu^{(k)}(x)$ limita:

$$\nu^{(k)}(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{\sum_i \Delta t_i}{T} \tag{10}$$

În cazul semnalelor aleatoare ergodice timpul mediu $\nu^{(k)}(x)$ este egal cu $F_1(x)$.

Conform aproximării (9) şi proprietăţii (7), şi ţinând cont de expresia timpului mediu, în cazul semnalelor aleatoare staţionare şi ergodice se obţine pentru densitatea de probabilitate expresia:

$$p_1(x) = \frac{F_1(x+\Delta x) - F_1(x)}{\Delta x} = \frac{1}{T\Delta x} \cdot \sum_i \Delta t_i \tag{13}$$

în care semnificația duratelor Δt_i este cea din fig.2 .

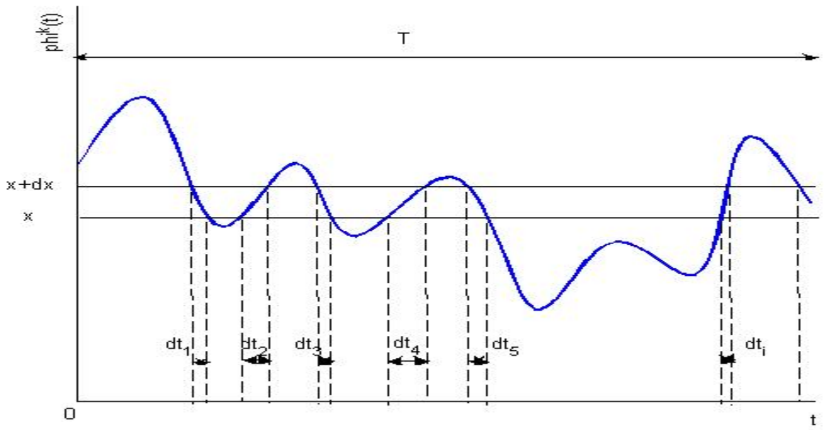

Figure 2

4. Desfăşurarea lucrării

4.1 Se vor studia caracteristicile statistice ale unui semnal aleator, staționar şi ergodic, de tip "zgomot alb". Se rulează în acest scop programul *random_signals_statistics.m* şi se reprezintă grafic semnalul de tip zgomot alb, densitatea sa de probabilitate şi funcția sa de repartiție. Se observă apoi cum se modifică densitatea de probabilitate şi funcția de repartiție în cazul în care modificăm numărul de eşantioane din semnal.

4.2 Se vor determina caracteristicile statistice ale unui semnal aleator, format ca şi o sumă de N sinusoide care nu sunt corelate între ele şi care au fază inițială aleatoare. În acest scop se rulează programul *random_sinsum_statistics.m*. Se reprezintă întâi funcția densitate de probabilitate pentru N=1. Observați că aceasta este total diferită față de aceea a zgomotului alb gaussian. Se comută apoi N pe valoarea 5, şi se reprezintă din nou densitatea de probabilitate. Se verifică sau nu Teorema Limită Centrală, şi în ce fel?

Anexă

Se prezintă o formulare intuitivă a Teoremei Limită Centrală.

Dacă:

- X, Y,…Z sunt variabile aleatoare
- $m_1\{X\}=m_1\{Y\}=\ldots=m_1\{Z\}$;
- variabilele aleatoare nu sunt corelate şi au distribuții oarecare;
- valoarea fiecărei variabile aleatoare este neglijabilă în raport cu suma lor;

atunci variabila aleatoare sumă:

$$S = X + Y + \ldots + Z$$

are o densitate de probabilitate cu atât mai apropiată de cea normală cu cât numărul termenilor din sumă este mai mare.