ANALIZA SPECTRALĂ A SEMNALELOR ALEATOARE

1. Scopul lucrării

Se studiază caracterizarea în domeniul frecvență a semnalelor aleatoare de tip „zgomot alb” şi „zgomot roz” şi aplicațiile acesteia la determinarea modulelor răspunsurilor în frecvență ale unor sisteme liniare şi invariante în timp.

2. Introducere

Modelarea matematică a zgomotelor care apar în dispozitivele şi circuitele electronice, dar şi a semnalelor vehiculate de sistemele de transmisie a informației au necesitat introducerea noțiunii de semnal aleator, echivalentă cu noțiunea de proces aleator sau stochastic din teoria probabilităților.

Pentru a defini un semnal aleator se consideră o experiență oarecare. Prin rezultatul unei experiențe se înțelege una din posibilitățile de realizare a acesteia. Mulțimea rezultatelor posibile se va numi în continuare spațiul eşantioanelor şi va fi notat cu S.
Un semnal aleator este deci o colecție de semnale uzuale în timp continuu, numite traiectorii sau realizări.

Procesele aleatoare sunt semnale, cu două proprietăți:

1. ele sunt funcții de timp
2. ele sunt aleatoare, în sensul că înainte de a realiza un experiment, nu este posibil să descriem „exact” forma de undă ce se va genera.

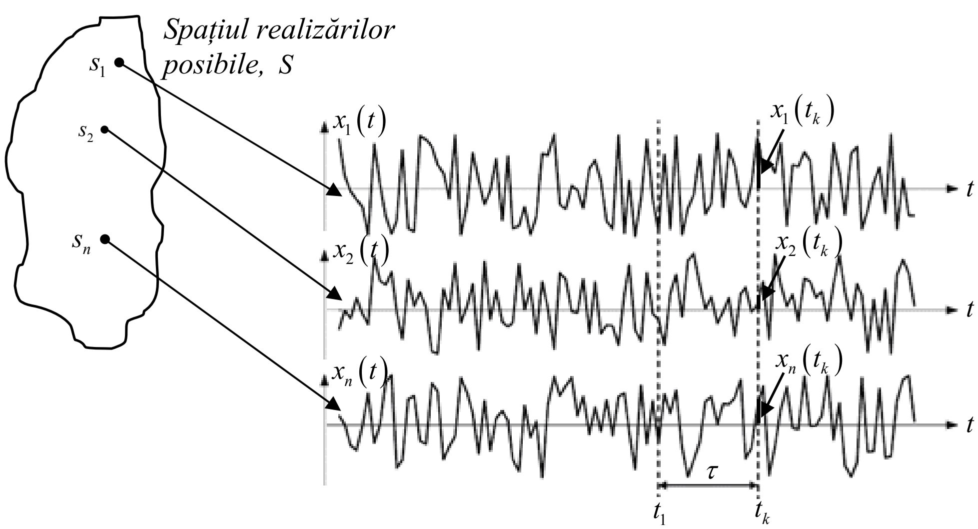

Figura 1. Un ansamblu de realizări posibile

Spațiul realizărilor posibile conține, ca puncte realizările procesului, ca funcții de timp. Un astfel de spațiu sau mulțimea funcțiilor de timp se numeşte proces stochastic sau proces aleator. Este evident că se consideră noțiunile de distribuții în probabilitate ale diferitelor evenimente posibile. Evenimentul, sau realizarea, constituie producerea unui anume semnal.

3. Procese staționare

Fiecărui punct s din spațiul S i se va asocia o funcție, cu durata limitată în timp:

$$X(t,s),\ -T \le t \le T \tag{1}$$

Durata $2T$ se mai numeşte şi intervalul de observare.

Dacă punctul s este fixat, $s = s_j$, funcția de timp $X(t,s)$ se mai numeşte şi realizare (de durată limitată) sau funcție eşantion:

$$x_j(t) = X(t, s_j) \tag{2}$$

În figura 1 se arată o mulțime de funcții eşantion (realizări) $\{x_j(t) | j = 1, 2, \dots, n\}$. Fixând timpul, $t = t_k$, mulțimea de valori:

$$\{x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)\} = \{X(t_k, s_1), X(t_k, s_2), \dots, X(t_k, s_k)\} \tag{3}$$

este o variabilă aleatoare. Prin urmare, un proces poate fi privit ca şi o mulțime de variabile aleatoare, indexate după timp: $\{X(t,s)\}$. Pentru simplificarea notațiilor nu se evidențiază s şi procesul se notează simplu cu $X(t)$.

Se consideră un proces aleator strict staționar $X(t)$. Prin definiție media procesului $X(t)$ este speranța matematică a variabilei aleatoare $X(t)$ şi se notează cu $\mu_X(t)$:

$$\mu_X(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p_{X(t)}(x)\, dx \tag{4}$$

unde $p_{X(t)}$ este densitatea de repartiție a variabilei aleatoare $X(t)$, pentru t fixat.

Pentru un proces strict staționar este valabilă egalitatea:

$$\mu_X(t) = \mu_X \tag{5}$$

adică media unui astfel de proces este o constantă.

Se consideră în continuare două momente fixate, t_1 şi t_2 şi fie $p_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)$ densitatea de repartiție comună a variabilelor aleatoare $X(t_1)$ şi $X(t_2)$. Atunci media variabilei aleatoare produs, $X(t_1)$ şi $X(t_2)$ este:

$$\mu_{X(t_1),X(t_2)} = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1\, x_2\, p_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 \tag{6}$$

Funcția care asociază fiecărei perechi (t_1,t_2) valoarea $\mu_{X(t_1),X(t_2)}$ se numeşte funcție de corelație statistică a semnalului aleator şi se notează $R_X(t_1,t_2)$:

$$R_X(t_1,t_2) = \mu_{X(t_1),X(t_2)} \tag{7}$$

Dacă $X(t)$ este un proces aleator strict staționar, $p_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)$ depinde numai de diferența $t_2 - t_1$ şi nu de valorile absolute ale timpului. Prin urmare, avem:

$$R_X(t_1,t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau),\ \forall t_1,\ \forall t_2 \tag{8}$$

Proprietățile funcției de autocorelație

1. Valoarea medie pătratică a procesului aleator $X(t)$ este valoarea funcției de autocorelație calculată în origine:

$$R_X(0) = E\{X^2(t)\} \tag{9}$$

2. Autocorelația este o funcție pară:

$$R_X(\tau) = R_X(-\tau),\ \tau \in \Re \tag{10}$$

3. Funcția de autocorelație $R_X(\tau)$ are un maxim în origine:

$$|R_X(\tau)| \le R_X(0),\ \tau \in \Re \tag{11}$$

Analiza spectrală a semnalelor aleatoare nu se poate face asupra traiectoriilor individuale, pentru că acestea sunt semnale de putere finită, dar această analiză se poate face pe criterii statistice şi energetice. Fie, în acest scop, $x_n(t)$, cu n fixat, o traiectorie a semnalului aleator.

Se consideră traiectoria trunchiată:

$$x_T(t) = \begin{cases} x_n(t), & |t| < T/2 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases} \tag{12}$$

şi $X_T(\omega)$ transformata sa Fourier. Densitatea spectrală medie de putere a acestui semnal, $S_T(\omega)$, se obține împărțind densitatea sa energetică $|X_T(\omega)|^2$ la durata semnalului:

$$S_T(\omega) = \frac{1}{T}|X_T(\omega)|^2 \tag{13}$$

Se observă că $S_T(\omega)$ este, pentru ω fixat, o variabilă aleatoare, definită pe câmpul S. Notând cu $m\{\,\cdot\,\}$ operatorul de mediere şi făcând $T \to \infty$ se obține o funcție de ω:

$$S(\omega)=\lim_{T\to\infty}E\{S_T(\omega)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left\{\left|X_T(\omega)\right|^2\right\} \tag{14}$$

numită densitatea spectrală de putere a semnalului aleator.

Conform **teoremei Wiener-Hincin,** funcția de corelație statistică şi densitatea spectrală de putere formează o pereche Fourier:

$$\mathcal{F}\{R(\tau)\}=S(\omega) \tag{15}$$

$F(\omega)$ este o funcție pară (vezi relația 10) şi pozitivă:

$$S(\omega)\geq 0\,,\ \omega\in R \tag{16}$$

$$S(\omega)=S(-\omega),\ \omega\in R \tag{17}$$

4. Procese ergodice

Speranța matematică $E\{\cdot\}$ este o mediere de ansamblu, pe toate realizările unui proces aleator $X(t)$. Se mai poate obține un alt tip de medie, efectuată „în lungul" procesului, o medie realizată pe un eşantion al procesului şi efectuată în timp. Această mediere poate fi mai uşor implementată, motiv pentru care se doreşte să ştie dacă există vreo legătură între mediile statistice şi mediile temporale.

Se consideră o realizare a procesului $X(t)$, funcția eşantion $x(t)$, intervalul de observare fiind de la $-T$ la T. Se consideră că $X(t)$ este un proces staționar. Media temporală a lui $x(t)$ este:

$$\mu_x(T)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\,dt \tag{18}$$

Este evident, că $\mu_x(T)$ este o variabilă aleatoare, depinzând de realizarea $x(t)$ curentă şi de durata $2T$ a intervalului de observare. Media sa statistică este:

$$E\{\mu_x(T)\}=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E\{x(t)\}\,dt=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\mu_X\,dt=\mu_X \tag{19}$$

adică

$$E\{\mu_x(T)\}=\mu_X \tag{20}$$

Prin urmare $\mu_x(T)$ este o estimare neabătută a mediei μ_X.

Se spune că procesul $X(t)$ este ergodic în medie, dacă sunt satisfăcute două condiții:

1. Media temporală $\mu_x(T)$ tinde spre media statistică, μ_X, când $T\to\infty$, adică:

$$\lim_{T\to\infty}\mu_x(T)=\mu_X \tag{21}$$

2. Dispersia lui $\mu_x(T)$, considerat ca variabilă aleatoare, tinde spre zero, atunci când $T \to \infty$:

$$\lim_{T\to\infty} \operatorname{var}\{\mu_x(T)\} = 0 \tag{22}$$

O altă medie de interes este autocorelația. Se poate defini o medie temporală pentru estimarea autocorelației:

$$R_x(\tau,T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+\tau)x(t)\,dt \tag{23}$$

$R_x(\tau,T)$ este o variabilă aleatoare, dependentă de realizarea $x(t)$ şi de lungimea $2T$ a intervalului de mediere.

Se spune, că procesul $X(t)$ este ergodic în autocorelație dacă sunt satisfăcute două condiții:

1. $\lim_{T\to\infty} R_x(\tau,T) = R_X(\tau)$
2. $\lim_{T\to\infty} \operatorname{var}\{R_x(\tau,T)\} = 0$

Pentru a avea deci proprietățile de ergodicitate trebuie ca procesul să fie staționar Reciproca nu este adevărată.

5. Semnale aleatoare în sisteme liniare

Se consideră un sistem cu răspunsul la impuls $h(t)$ presupus real. Dacă la intrarea acestui sistem se aduce un semnal aleator staționar şi ergodic, atunci semnalul de la ieşire este tot un semnal staționar şi ergodic şi:

$$S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) \tag{24}$$

unde $S_X(\omega)$, $S_Y(\omega)$ sunt densitățile spectrale de putere ale semnalelor de intrare, respectiv de la ieşire, iar $H(\omega)$ este răspunsul în frecvență al sistemului.

6. Zgomotul alb

Analiza de zgomot a sistemelor de comunicații se bazează de obicei, pe o formă de zgomot idealizată, numită zgomot alb, a cărei densitate spectrală de putere este independentă de frecvență. Adjectivul „alb” se foloseşte în sensul în care se spune că lumina albă conține în spectrul vizibil componente de diverse culori, cu aceeaşi intensitate. O realizare a zgomotului alb se notează cu $w(t)$ şi densitatea spectrală de putere a procesului este:

$$S_W(\omega) = \frac{N_o}{2} \tag{25}$$

Parametru N_0 se raportează de obicei, etajul de intrare al receptorului şi se exprimă cu:

$$N_0 = kT_e \tag{26}$$

unde T_e fiind temperatura echivalentă de zgomot a receptorului.

Funcția de autocorelație a zgomotului alb este:

$$R_W(\tau) = \frac{N_o}{2}\delta(\tau) \tag{27}$$

Se vede că $R_W(\tau) = 0$ pentru $\forall \tau \neq 0$. Ca urmare, două eşantioane prelevate din zgomotul alb, indiferent cât de apropiate sunt ele în timp, sunt necorelate. Dacă, în plus, zgomotul alb este şi gaussian , eşantioanele sunt şi statistic independente. Zgomotul alb ar avea puterea medie infinită şi deci el nu este realizabil fizic. Este, mai curând, un concept ce uşurează mult calculele şi conduce la rezultate foarte apropiate de cele din practică.

Semnalele reale se numesc „colorate" şi au forme diferite pentru funcțiile de corelație şi cea de densitate spectrală de putere. Cât timp un semnal are o funcție de corelație îngustă, banda de densitate spectrală a puterii este largă şi în acest caz semnalul este mai apropiat de zgomotul alb. Dacă funcția de corelație este largă, banda spectrală a semnalului este îngustă şi semnalul este mai apropiat de un semnal periodic (determinist).

7. Desfăşurarea lucrării

Să se determine experimental densitatile spectrale de putere ale semnale de la iesirea unui generator de zgomot: zgomot alb si zgomot roz.

Avem in acest scop: un generator de zgomot, un osciloscop si analizor spectru in timp real (a se vedea anexa pentru descrierea acestuia).

Frecventele centrale f_{ci} ale filtrelor trece banda se citesc de pe panoul frontal al analizorului.

Densitatea spectrala de putere la iesirea fiecarui filtru este

$$S_i\left[\frac{\mathrm{V}^2}{\mathrm{Hz}}\right] = \frac{P_i}{B_i}$$

unde banda de frecvente si factorul de calitate al filtrului sunt:

$$B_i = \frac{f_{ci}}{Q}$$

$$Q = \frac{f_{ci+1} + f_{ci}}{2\left(f_{ci+1} - f_{ci}\right)}$$

Obs: Valoarea de referinta este $V_{ref} = 1\mu V$, i.e. $P_{ref} = 10^{-12}$ W pentru R=1 Ω:

$$V_{ef}[\mathrm{V}] = V_{ref} \cdot 10^{\frac{V_{ef}[\mathrm{dB}]}{20}}$$

$$P[\mathrm{dB}] = 10\log\frac{P_{in}[\mathrm{W}]}{P_{ref}[\mathrm{W}]} = V_{ef}[\mathrm{dB}] = 20\log\frac{V_{ef}[\mathrm{V}]}{V_{ref}[\mathrm{V}]}$$

$$P = \frac{\left(V_{ef}\,[\mathrm{V}]\right)^2}{R} \quad \text{cu R=1 } \Omega$$

Analiza incepe apasand pe butonul START al analizorului de spectru in timp real; apoi se apasa butonul MOMENT. Valorile pentru fiecare canal se citesc in dB; pentru schimbarea canalului se foloseste comutatorul KANAL, de la 2→31.

Datele se trec intr-un tabel de forma:

i	f_{ci} [Hz]	Q	B_i [Hz]	$V_{ef,i}$ [dB]	$V_{ef,i}$ [V]	P_i [V^2]	S_i [V^2/Hz]
2	25						
3	31.5						
4	40						
. . .		4.5					
31							

unde: i = numarul canalului;

f_{ci} = frecventa centrala a filtrului;

Q = 4,5 (factorul de calitate al FTB);

B_i = fci/Q – largimea de banda;

Pi = puterea;

S_i = densitate spectrala de putere;

Se reprezinta grafic densitatea spectrala de putere a zgomotului alb, respectiv a zgomotului roz – adica S_i [V^2/Hz] functie de f_{ci} [Hz].

Anexa Analizor de spectru in timp real

Schema de principiu a unui analizor de spectru in timp real se prezinta in fig.1.

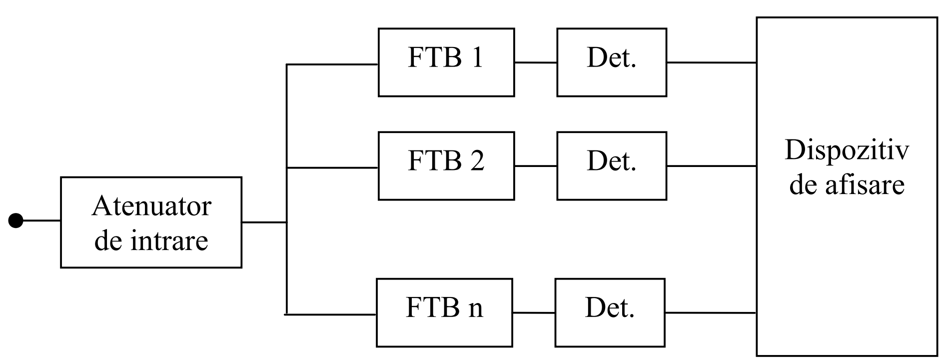

Fig.1

Caracteristicile filtrelor trece-banda FTB_i se intersecteaza ca in fig.2

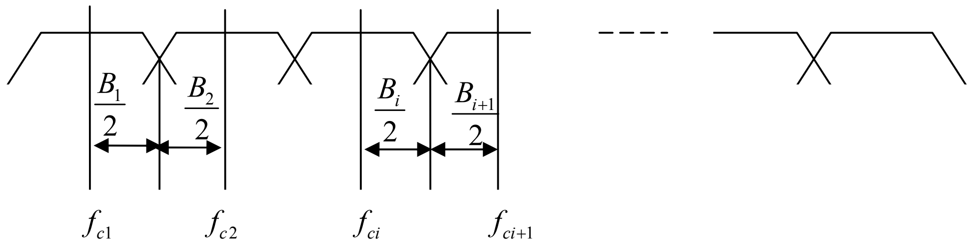

Fig. 2

Se cunosc marimile fci, si se stie ca toate filtrele au acelasi factor de calitate:

$$Q = \frac{f_{ci}}{B_i} \tag{A1}$$

Din fig.2 rezulta:

$$f_{ci+1} - f_{ci} = \frac{B_i + B_{i+1}}{2} \tag{A2}$$

deci

$$Q = \frac{f_{ci+1} + f_{ci}}{2\left(f_{ci+1} - f_{ci}\right)} \tag{A3}$$

In continuare benzile filtrelor rezulta din (A1).

Notand cu $x_i(t)$ semnalul de la iesirea filtrului FTB_i, si presupunand ca acesta este o tensiune electrica detectoarele ar trebui sa realizeze operatia:

$$u_{ef,i}^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i^2\left(\theta\right) d\theta \tag{A4}$$

In realitate detectoarele realizeaza operatia:

$$u_{ef,i}^2\left(t\right) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i^2\left(\theta\right) d\theta \tag{A5}$$

T fiind o constanta a aparatului. Pentru valori suficient de mari ale lui T se obtine

$$u_{ef,i}^2\left(t\right) = u_{ef,i}^2 = \text{const.} \tag{A6}$$

Marimea

$$F_i = \frac{U_{ef,i}^2}{B_i} \tag{A7}$$

reprezinta o aproximatie a densitatii spectrale de putere a semnalului analizat in banda filtrului FTB_i.