<u>Transformata Laplace</u>

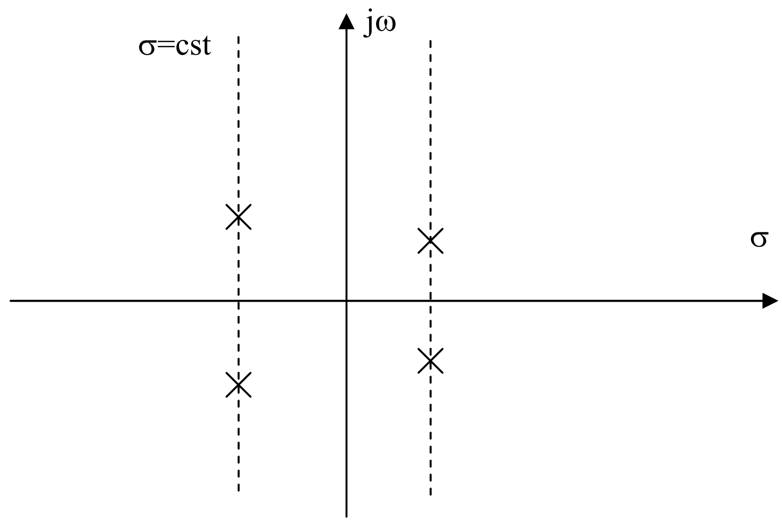
Transformata Laplace generalizează ideea transformatei Fourier in tot planul complex.
Pt un semnal x(t) spectrul sau transformata Fourier este

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Pt acelaşi semnal x(t) se poate introduce transformata Laplace

$$L\big(x(t)\big)(s) = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt; \quad s = \sigma + j\omega$$

unde integrala se efectuează pe o curba $\sigma = \text{cst}$ de la $-\infty$ la ∞.
Pentru $\sigma = 0$ transformata Laplace este spectrul semnalului adică transformata Fourier.



<u>Domeniul de convergenta</u> = domeniul valorilor lui s pt care integrala este convergenta sau X(s) - finita.

Proprietati DC

1. format din benzi paralele cu axa imaginara $j\omega$
2. nu conține nici un pol al transformatei Laplace
3. pt semnale cu întindere spre dreapta (o subcategorie fiind semnalele cauzale), DC începe cu cel mai dreapta pol si se întinde tot spre dreapta $\text{Re}\{s\} > \sigma_{p\max}$
4. pt semnale cu întindere spre stânga (o subcategorie fiind semnalele anticauzale), DC începe cu cel mai dreapta pol si se întinde tot spre stânga $\text{Re}\{s\} < \sigma_{p\min}$
5. pt semnale cu întindere de la $-\infty$ la ∞, DC este o banda ce nu include poli
6. semnalele cu suport mărginit au transformata Laplace definita in tot planul.
7. <u>sistemul stabil</u> <=> axa jω inclusa in DC.

Transformata inversa

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}X(s)e^{st}ds$$

Integrala se efectuează pe dreapta paralela cu axa imaginara ($\sigma=$ cst)
Mai des se foloseşte metoda <u>descompunerii in fracții simple</u> si inversarea cu ajutorul tabelelor.

Probleme

1. Transformata Laplace X(s) a unui semnal x(t) este $X(s)=\dfrac{s+2}{(s-1)^2(s+3)}$.

Sa se determine x(t) in următoarele condiții

a) Re(s)<-3; b) -3< Re(s)<1; c) Re(s)>1.

Rezolvare

$$X(s)=\frac{s+2}{(s-1)^2(s+3)}=\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{s-1}}+\frac{\mathrm{A}_2}{(\mathrm{s-1})^2}+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{s+3}};$$

$$\Rightarrow\ B=(s+3)X(s)\Big|_{s=-3}=\left.\frac{s+2}{(s-1)^2}\right|_{s=-3}=-1/16$$

$$A_2=(s-1)^2X(s)\Big|_{s=1}=\left.\frac{s+2}{s+3}\right|_{s=1}=3/4$$

$$A_1=\frac{d}{ds}\left[(s-1)^2X(s)\right]\Big|_{s=1}=\left.\frac{s+3-s-2}{(s+3)^2}\right|_{s=1}=1/16$$

$$X(s)=\frac{s+2}{(s-1)^2(s+3)}=\frac{1/16}{\mathrm{s-1}}+\frac{3/4}{(\mathrm{s-1})^2}-\frac{1/16}{\mathrm{s+3}}$$

a) DC : Re(s)<-3 => $x(t)=-\frac{1}{16}e^t\sigma(-t)-\frac{3}{4}te^t\sigma(-t)+\frac{1}{16}e^{-3t}\sigma(-t)$

b) DC: -3< Re(s) <1 => $x(t)=-\frac{1}{16}e^t\sigma(-t)-\frac{3}{4}te^t\sigma(-t)-\frac{1}{16}e^{-3t}\sigma(t)$

c) DC: Re(s) > 1 => $x(t)=\frac{1}{16}e^t\sigma(t)+\frac{3}{4}te^t\sigma(t)-\frac{1}{16}e^{-3t}\sigma(t)$

Verificati expresia lui x(t) folosind mediul Matlab:

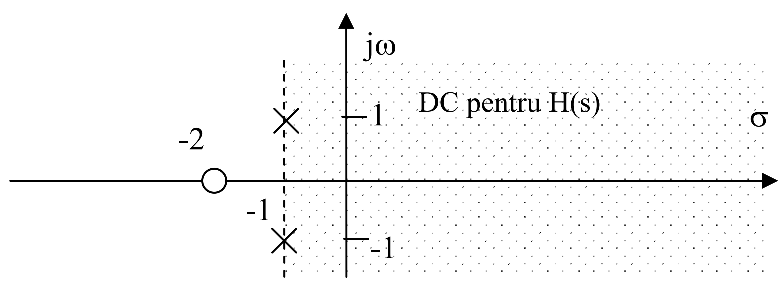
```
>> L=(s+2)/((s-1)^2*(s+3))
>> ilaplace(L)
```

2. Funcția de transfer a unui sistem liniar invariant in timp si cauzal este data de expresia $H(s)=\dfrac{s+2}{s^2+2s+2}$. Determinați si desenați răspunsul sistemului, daca la intrarea sa se aplica semnalul $x(t)=e^{-2|t|}$.

Rezolvare

$$y(t)=x(t)*y(t)\leftrightarrow Y(s)=X(s)\cdot H(s)$$

$$H(s)=\frac{s+2}{s^2+2s+2}=\frac{s+2}{(s-s_1)(s-s_2)}$$ cu poli complecşi $s_{1,2}=-1\pm j\Rightarrow \sigma_{p\max}=-1$



Sistemul este cauzal: DC este $\mathrm{Re}\{s\}>-1$

$$x(t)=e^{-2|t|}=\begin{cases}e^{-2t}, t\geq 0\\ e^{2t}, t<0\end{cases}=e^{-2t}\sigma(t)+e^{2t}\sigma(-t)$$

=> $X(s)=\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s-2}=\dfrac{-4}{s^2-4}$ cu DC: -2<Re(s)<2

$$Y(s)=X(s)\cdot H(s)=\frac{-4}{\left(s^2-4\right)}\frac{s+2}{\left(s^2+2s+2\right)}=\frac{-4}{(s-2)\left(s^2+2s+2\right)}$$

Domeniul sau de convergenta este intersectia DC pentru $H(s)$ si DC pentru $X(s)$:

$$-1<\mathrm{Re}\{s\}<2$$

$$Y(s)=\frac{-4}{(s-2)\left(s^2+2s+2\right)}=\frac{A}{s-2}+\frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

=> $A\left(s^2+2s+2\right)+(Bs+C)(s-2)=-4$

=> s= 2, A = -2/5

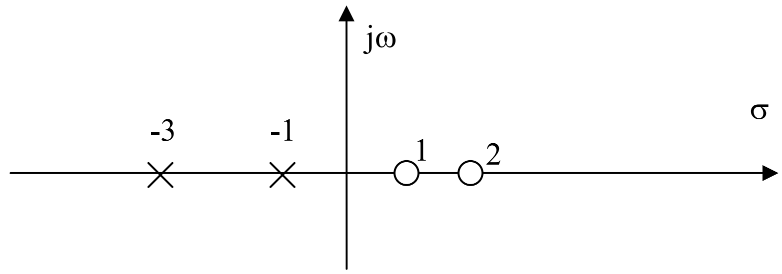
s=0, C = 8/5

s=1, B = 2/5

=> $Y(s)=-\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{2}{5}\dfrac{s+4}{s^2+2s+2}=-\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{2}{5}\left[\dfrac{s+1}{(s+1)^2+1}+\dfrac{3}{(s+1)^2+1}\right]$

=> $y(t)=\dfrac{2}{5}e^{2t}\sigma(-t)+\dfrac{2}{5}\left[e^{-t}\cos t+3e^{-t}\sin t\right]\sigma(t)$

3. Fie un sistem liniar, invariant in timp si cauzal a cărui funcție de sistem H(s) are constelația de poli si de zerouri din figura:



a) Sa se indice toate regiunile de convergenta posibile; b) Indicați in fiecare caz daca sistemul satisface sau nu condițiile de stabilitate si/sau cauzalitate.

Rezolvare.

Re(s)<-3 -> sistem anticauzal si instabil,

-3<Re(s)<-1 -> sistem instabil,

-1<Re(s) -> sistem cauzal si stabil.

4. Sa se demonstreze următoarele proprietăți ale transformatei Laplace: a) deplasarea in domeniul timp; b) deplasarea in domeniul s; c) scalarea in timp x(at); d) convoluția in domeniul timp; e) derivarea in domeniul s.

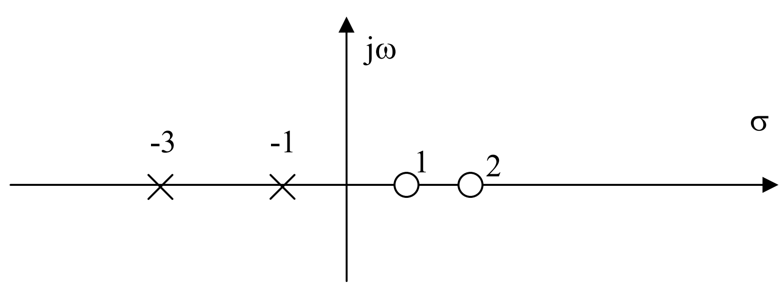
5. Fie un sistem obținut prin conectarea in cascada a doua sisteme liniare si invariante in timp ale căror funcții de transfer sunt $H_1(s)$ si $H_2(s)$. Daca funcția de transfer a sistemului echivalent H(s) este unitara, sistemul descris de $H_2(s)$ se numeşte sistem invers sistemului descris de $H_1(s)$.

a) Sa se determine relația de legătura intre $H_1(s)$ si $H_2(s)$.

b) In figura este prezentata constelația de poli si zerouri a lui $H_1(s)$, corespunzătoare unui sistem cauzal si stabil. Sa se determine constelația de poli si zerouri pentru funcția de transfer a sistemului invers asociat.

c) Sa se determine $h_2(t)$, răspunsul la impuls al sistemului invers in ipoteza ca este stabil.

d) sa se demonstreze ca răspunsul la impuls al sistemului echivalent h(t) este identic cu δ(t).



6. Un SLIT cu intrarea x(t) si ieşirea y(t) este descris de ecuația diferențiala:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-3y=x$$

a) Determinați H(s), funcția de transfer a sistemului. Schițați constelația de poli si zerouri.
b) Determinați h(t) daca – sistemul este stabil; - sistemul este cauzal; - sistemul nu este nici stabil nici cauzal.

Rezolvare.

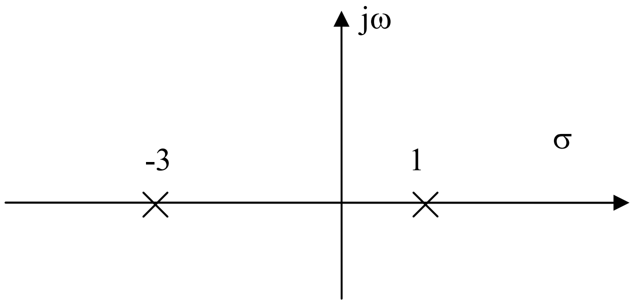
a) $\frac{d}{dt}x(t) \leftrightarrow sX(s)$; $\quad \frac{d^2}{dt^2}x(t) \leftrightarrow s^2X(s)$.

=> $s^2Y + 2sY - 3Y = X$ => $H(s) = \frac{1}{s^2+2s-3} = \frac{1}{(s-1)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3}$

$$A = (s-1)H(s)\Big|_{s=1} = \frac{1}{s+3}\Big|_{s=1} = \frac{1}{4}$$

$$B = (s+3)H(s)\Big|_{s=-3} = \frac{1}{s-1}\Big|_{s=-3} = -\frac{1}{4}$$

$$H(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+3}\right)$$



b) sistem stabil <=> DC: -3<Re(s)<1, $h(t) = -\frac{1}{4}e^{t}\sigma(-t) - \frac{1}{4}e^{-3t}\sigma(t)$

sistem cauzal <=> DC: Re(s)>1, $h(t) = \frac{1}{4}e^{t}\sigma(t) - \frac{1}{4}e^{-3t}\sigma(t)$ (instabil)

Verificati expresia raspunsului la impuls folosind mediul Matlab:

```
>> L=1/4/(s-1)-1/4/(s+3)
>> ilaplace(L)
```

sistem instabil,anticauzal <=> DC: Re(s)<-3, $h(t) = -\frac{1}{4}e^{t}\sigma(-t) + \frac{1}{4}e^{-3t}\sigma(-t)$

7. Un SLIT are răspunsul: $y(t) = \left(2e^{-t} - 2e^{-4t}\right)\sigma(t)$ daca la intrare se aplica semnalul $x(t) = \left(e^{-t} + e^{-3t}\right)\sigma(t)$.

a) determinați răspunsul in frecventa al sistemului, $H(\omega)$

b) determinați funcția pondere a sistemului, h(t)
c) care este ecuația diferențiala care descrie sistemul,
d) dați o implementare posibila a sistemului.

Rezolvare.

a) $Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+4} \quad X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3};$

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{6}{(s+1)(s+4)} \frac{(s+1)(s+3)}{2(s+2)} = \frac{3(s+3)}{(s+2)(s+4)}$; DC: Re(s)>-2, sistem cauzal

$$H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{3(j\omega+3)}{(j\omega+2)(j\omega+4)}$$

b) $H(s) = \frac{3(s+3)}{(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+4}$

$$A = (s+2)H(s)\big|_{s=-2} = \frac{3(s+3)}{s+4}\bigg|_{s=-2} = \frac{3}{2}; \quad B = (s+4)H(s)\big|_{s=-4} = \frac{3(s+3)}{s+2}\bigg|_{s=-4} = \frac{3}{2}$$

$$H(s) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+4}\right) \leftrightarrow h(t) = \frac{3}{2}\left(e^{-2t} + e^{-4t}\right)\sigma(t)$$

Verificati expresia raspunsului la impuls folosind mediul Matlab:

```
>> L=(3/2)/(s+2)+(3/2)/(s+4)
>> ilaplace(L)
```

c) Ecuația diferențiala $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x}{dt^k} \leftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$

$$\Rightarrow \; y'' + 6y' + 8y = 3x' + 9x$$

d) Se foloseşte una din cele 2 forme canonice de implementare:

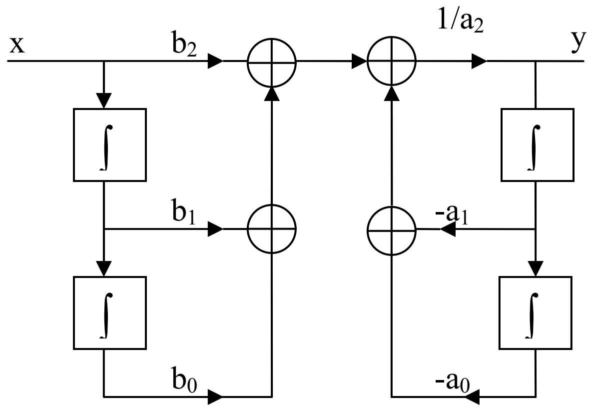
$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' = b_0 x + b_1 x' + b_2 x''$

$a_0 \int y + a_1 y + a_2 y' = b_0 \int x + b_1 x + b_2 x'$

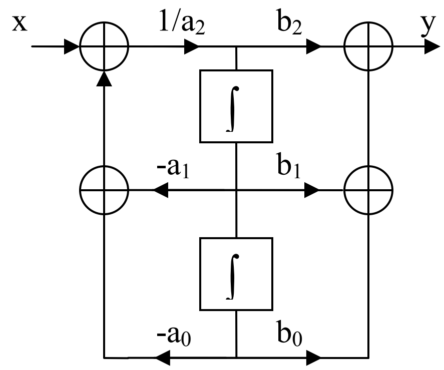
$a_0 \iint y + a_1 \int y + a_2 y = b_0 \iint x + b_1 \int x + b_2 x$

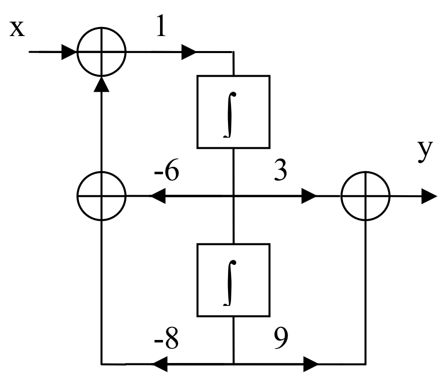
$$\Rightarrow \; y = \frac{1}{a_{2\ 0}} \left[b_0 \iint x + b_1 \int x + b_2 x - a_0 \iint y - a_1 \int y \right]$$

Forma canonică 1



Forma canonică 2





8. Pentru sistemul liniar si invariant in timp cauzal cu răspunsul in frecventa

$$H(\omega)=\frac{7+j\omega}{(4+j\omega)(1-\omega^2+j\omega)}$$

a) determinați h(t),
b) dați o structura de implementare constând din doua sisteme conectate in cascada,
c) dați o structura de implementare constând din doua sisteme conectate in paralel.

Rezolvare.

$$H(s)=H(\omega)\big|_{s=j\omega}=\frac{s+7}{(s+4)(s^2+s+1)}=\frac{A}{s+4}+\frac{Bs+C}{s^2+s+1}$$

$$A=(s+4)H(s)\big|_{s=-4}=\left.\frac{s+7}{s^2+s+1}\right|_{s=-4}=\frac{3}{13}$$

s=0 => C=22/13 => B=-3/13.

$$H(s)=\frac{3}{13}\left(\frac{1}{s+4}-\frac{s-\frac{22}{3}}{s^2+s+1}\right)=\frac{3}{13}\left(\frac{1}{s+4}-\frac{s-\frac{22}{3}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)$$

$$H(s)=\frac{3}{13}\left(\frac{1}{s+4}-\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{22}{3}+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)$$

$$H(s)=\frac{3}{13}\left(\frac{1}{s+4}-\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{47}{6}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)$$

$$h(t)=\frac{3}{13}e^{-4t}\sigma(t)-\frac{3}{13}e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\sigma(t)+\frac{3}{13}\frac{47}{3\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\sigma(t)$$

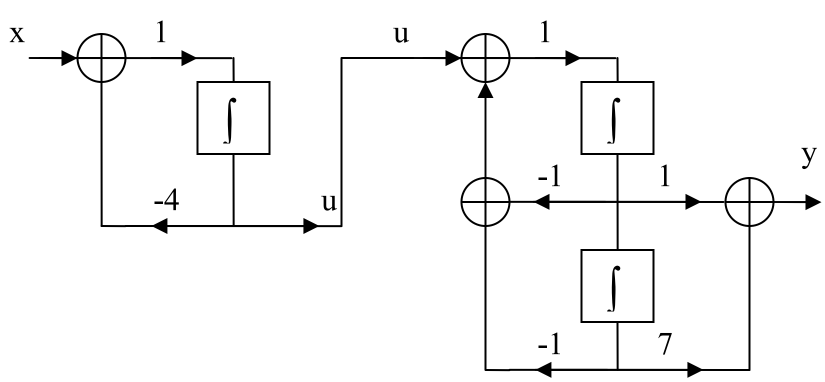
Verificati expresia raspunsului la impuls folosind mediul Matlab:

```
>> L=(s+7)/(s+4)/(s^2+s+1)
>> ilaplace(L)
```

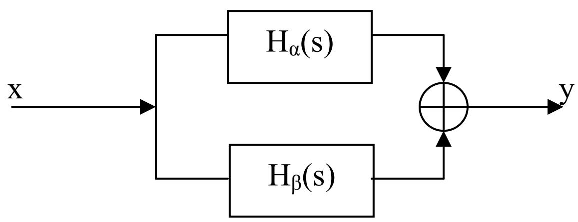
b) $H(s)=\frac{s+7}{(s+4)(s^2+s+1)}=\frac{1}{s+4}\frac{s+7}{s^2+s+1}=H_a(s)H_b(s)$

Pentru $H_a(s)$: $a_0y+a_1y'=b_0x+b_1x'$ sau $4y+y'=x$

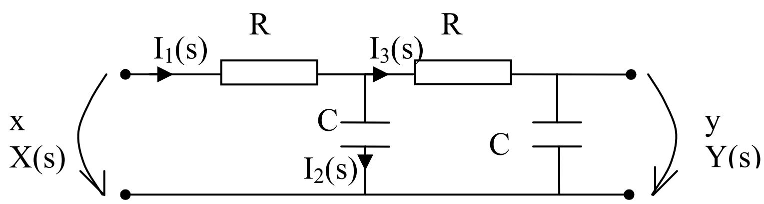
Pentru $H_b(s)$: $a_0y+a_1y'+a_2y''=b_0x+b_1x'+b_2x''$ sau $y+y'+y''=x'+7x$



c) $H(s)=\frac{3}{13}\left(\frac{1}{s+4}-\frac{s-\frac{22}{3}}{s^2+s+1}\right)=H_\alpha(s)+H_\beta(s)$



9. Fie sistemul din figura:



a) sa se determine funcția de transfer a circuitului, daca R=100kΩ, C=10uF.
b) Ce tip de caracteristica realizează acest circuit? Sa se determine factorul de calitate Q, amplificarea si pulsația de rezonanta naturala ω_0.
c) Sa se determine răspunsul sistemului la un impuls unitate, respectiv la un semnal armonic $x(t)=A_0\cos\omega_0 t$.

Rezolvare.

$$I_3(s)=\frac{Y(s)}{\frac{1}{sC}}=sCY(s);$$

$$I_2(s)\frac{1}{sC}=I_3(s)\left(R+\frac{1}{sC}\right)\Rightarrow I_2(s)=I_3(s)(1+sCR)=(1+sCR)sCY(s)$$

$$I_1(s)=I_2(s)+I_3(s)=sC(2+sCR)Y(s)$$

$$X(s)=I_1(s)R+I_2(s)\frac{1}{sC}=\left[(sCR)^2+3sCR+1\right]Y(s)$$

=> $H(s)=\frac{Y}{X}=\frac{1}{s^2(CR)^2+3s(CR)+1}=\frac{1}{s^2+3s+1}$, pentru RC=1 (filtru trece-jos)

b) $H(\omega)=\dfrac{1}{1-\omega^2+3j\omega}=\dfrac{A}{\omega_0{}^2-\omega^2+2j\xi\omega\omega_0}$ => A=1, amplificare la joasa frecventa

$Q=\dfrac{1}{2\xi}=0.33$, factorul de calitate, $\omega_0=1$ pulsația naturala

c) $H(s)=\dfrac{1}{s^2+3s+1}=\dfrac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}$, $\quad s_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$,

$$H(s)=\frac{A}{s-s_1}+\frac{B}{s-s_2}$$

=> $A=(s-s_1)H(s)\Big|_{s=s_1}=\dfrac{1}{s-s_2}\Bigg|_{s=s_1}=\dfrac{2}{-3+\sqrt{5}-(-3-\sqrt{5})}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

=> $B=(s-s_2)H(s)\Big|_{s=s_2}=\dfrac{1}{s-s_1}\Bigg|_{s=s_2}=\dfrac{2}{-3-\sqrt{5}-(-3+\sqrt{5})}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

=> $h(t)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left[e^{-s_1t}\sigma(t)-e^{-s_2t}\sigma(t)\right]$

Răspunsul sistemului la impulsul unitate, $x(t)=\delta(t)$ => $y(t)=h(t)$

Răspunsul sistemului la $x(t)=A_0\cos\omega_0 t$ =>

$$y(t)=A_0\left|H(\omega_0)\right|\cos\left(\omega_0 t+\arg\{H(\omega_0)\}\right)$$

$$\left|H(\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2\right)^2+9\omega^2}}\Rightarrow\left|H(\omega_0)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega_0{}^2\right)^2+9\omega_0{}^2}}$$

$$\arg\{H(\omega)\}=-\arg\{1-\omega^2+3j\omega\}$$

Daca $|\omega_0|<1$ atunci $\arg\{H(\omega_0)\}=-\mathrm{arctg}\dfrac{3\omega_0}{1-\omega_0^2}$

Daca $|\omega_0|>1$ atunci $\arg\{H(\omega_0)\}=\pi+\mathrm{arctg}\dfrac{3\omega_0}{1-\omega_0^2}$

10. Pentru un SLIT răspunsul in frecventa este $H(\omega)=\dfrac{5j\omega+7}{(j\omega+4)\left((j\omega)^2+j\omega+1\right)}$.

a) Sa se determine răspunsul la impuls al sistemului h(t),
b) Dați o structura de implementare a sistemului.

a) $H(s)=\dfrac{5s+7}{(s+4)\left(s^2+s+1\right)}=-\dfrac{1}{s+4}+\dfrac{s+2}{s^2+s+1}$

$$H(s) = -\frac{1}{s+4} + \frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + 2\frac{\frac{3}{4}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$h(t) = -e^{-4t}\sigma(t) + e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\sigma(t) + 2e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\sigma(t)$$

Verificati expresia raspunsului la impuls folosind mediul Matlab:

```
>> L=-1/(s+4)+(s+2)/(s^2+s+1)
>> ilaplace(L)
```

b) $H(s) = \frac{5s+7}{(s+4)(s^2+s+1)} = \frac{5s+7}{s^3+5s^2+5s+4}$

b_1=5, b_0=7

a_3=1, a_2=5, a_1=5, a_0=4

sau: $y''' + 5y'' + 5y' + 4y = 5x' + 7x$