Transformarea sistemelor în timp continuu în sisteme în timp discret

http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ps/Cap11_Echivalare.pdf

O dată cu dezvoltarea tehnicii de calcul se pune tot mai fecvent problema înlocuirii sistemelor în timp continuu cu sisteme în timp discret, chiar şi în aplicaţiile semnalelor analogice.

Datorită experienţei acumulate în proiectarea sistemelor în timp continuu, sunt de interes metodele de sinteză a sistemelor în timp discret bazate pe echivalarea acestora cu sisteme în timp continuu corespunzătoare.

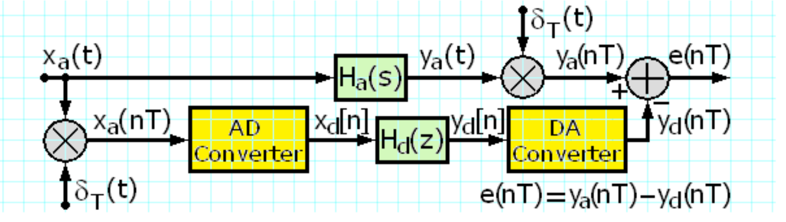
1. Metoda invariantei raspunsului la impuls

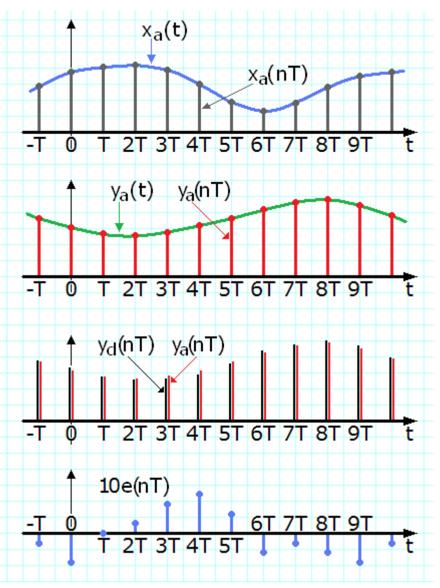
2. Metoda invariantei raspunsului indicial (la treapta unitara)

3. Aproximarea ecuaţiei diferenţiale care descrie sistemul analogic printr-o ecuaţie cu diferenţe finite (Finite Difference Approximation , FDA)

4.Transformarea biliniara

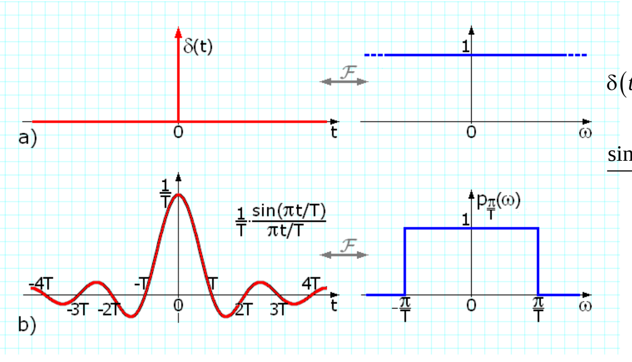
O schemă generală de evaluare a calităţii unei transformări pentru sistemele de bandă limitată





$H_a(s)$ - sistem de echivalat;
$H_d(z)$ - sistem echivalent.
Echivalarea trebuie facuta astfel incat eroarea e sa fie cat mai mica.
Se presupune ca : $H_a(j\omega)=0$, ptr. $|\omega|>\omega_M$ si ca $|X_a(\omega)|=0$, ptr. $|\omega|>\omega_M$. Semnalul $x_a(t)$ nu poate fi identic cu $\delta(t)$ deoarece produsul $\delta(t)\cdot\delta_T(t)$ nu este definit.

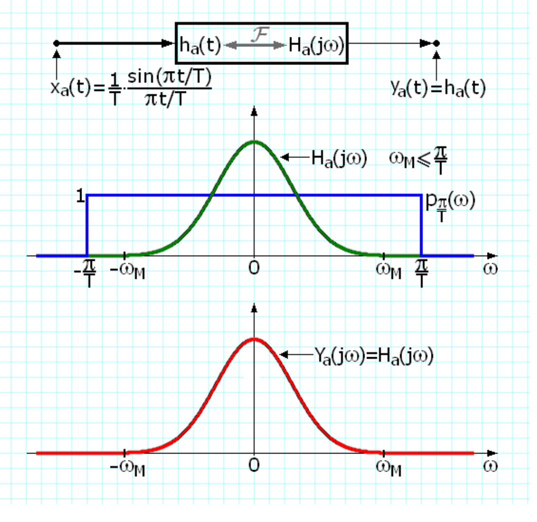
Identificarea sistemului



$\delta(t)$ -identifica un sistem, nu neaparat de banda-limitata

$\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ -identifica un sistem de banda limitata, cu $\omega_M < \frac{\pi}{T}$

Se observa ca nu putem pune $x_a(t) = \delta(t)$, deoarece produsul $\delta(t)\cdot\delta(t)$ nu este definit.

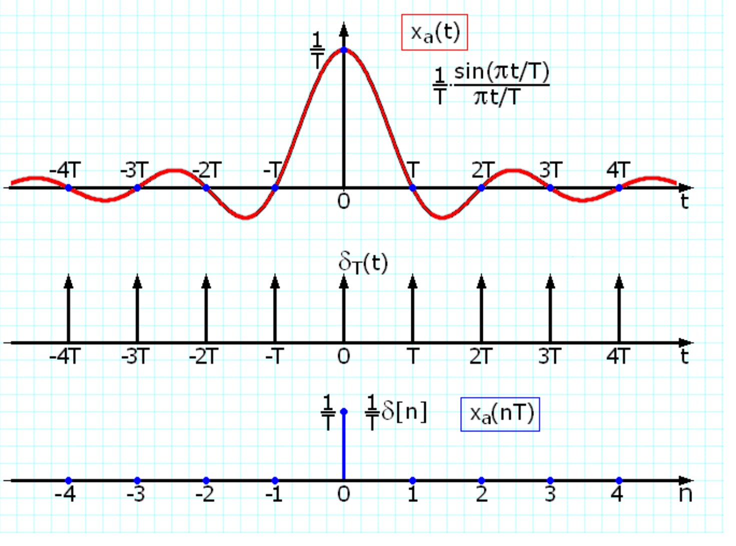


Identificarea unui sistem de banda limitata folosind sinusul cardinal.

Raspunsul in frecventa al sistemului de banda limitata care trebuie sa fie identificat

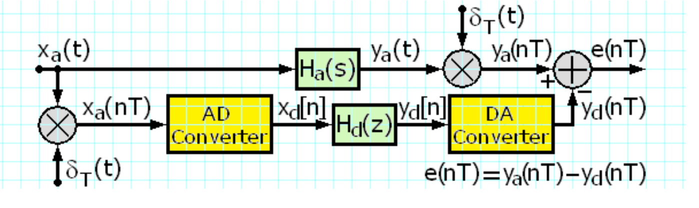
Spectrul semnalului de intrare (sinus cardinal)

Spectrul semnalului de iesire



1. *Metoda invariantei raspunsului la impuls*

$$\boxed{h_d[n] = Th_a(nT)}$$



Sistemul analogic: $x_a(t) = \frac{1}{T}\text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) \Rightarrow y_a(t) = h_a(t) \;\Rightarrow y_a(nT) = h_a(nT)$

Sistemul digital: $x_d[n] = \frac{1}{T}\delta[n] \Rightarrow y_d[n] = \frac{1}{T}\delta[n] * h_d[n] = \frac{1}{T}h_d[n]$

Pentru eroare minima $e(nT)$: $\quad h_a(nT) = \frac{1}{T}h_d(nT)$

Vom considera semnalul de intrare, $x_a(t) \longleftrightarrow X_a(s)$, de banda limitata la $\omega_M = \pi / T = \omega_s / 2$ (jumatate din frecventa de esantionare)

Raspunsul sistemului analogic, la momentele nT:

$$y_a(nT) = \mathcal{L}^{-1}\{X_a(s) H_a(s)\}(nT)$$

Raspunsul sistemului digital:

$$y_d(nT) = y_d[n] = \mathrm{Z}^{-1}\{X_d(z) H_d(z)\}$$

Pentru aproximare fara eroare , $e(nT) = 0$:

$$y_d[n] = y_d(nT) = y_a(nT), \text{ sau:}$$

$$\mathrm{Z}^{-1}\{X_d(z) H_d(z)\} = \mathcal{L}^{-1}\{X_a(s) H_a(s)\}(nT)$$

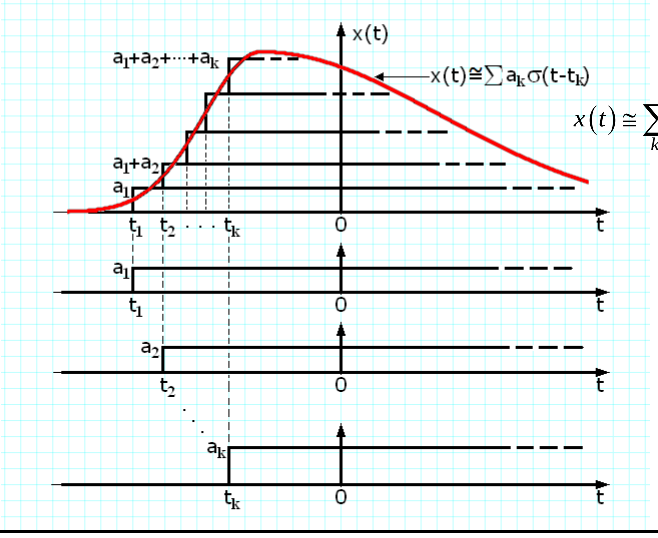
$$\boxed{H_d(z) = \frac{1}{X_d(z)} \mathrm{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\{X_a(s) H_a(s)\}(nT)\right\}}$$

Functia de transfer (sistemul discret) depinde de semnalul de intrare, datorita prezentei functiilor $X_a(s)$ si $X_d(z)$.

$$H_d(z) = \frac{1}{X_d(z)} \mathrm{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\{X_a(s) H_a(s)\}(nT)\right\}$$

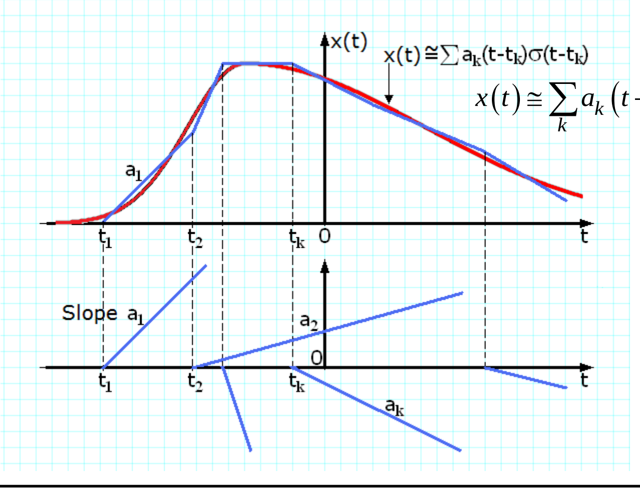
- Daca se schimba semnalul de intrare : se schimba sistemul digital.
- Nu exista aproximare perfecta.
- Aproximare folosind semnale “standard”:
  - Treapta unitara σ(t)
  - Semnal rampa t σ(t).

Aproximare prin insumarea unor semnale treapta unitara, deplasate si ponderate



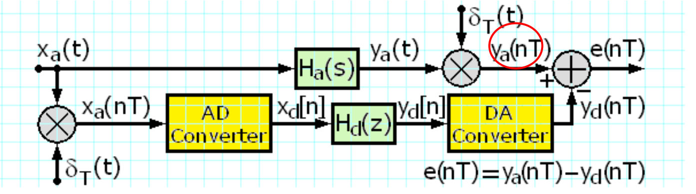
$$x(t) \cong \sum_k a_k \sigma(t - t_k)$$

Aproximare prin insumarea unor semnale rampa, deplasate si ponderate



$$x(t) \cong \sum_k a_k (t - t_k)\sigma(t - t_k)$$

Metoda invariantei raspunsului la impuls pentru sisteme digitale echivalate cu sisteme analogice de banda limitata



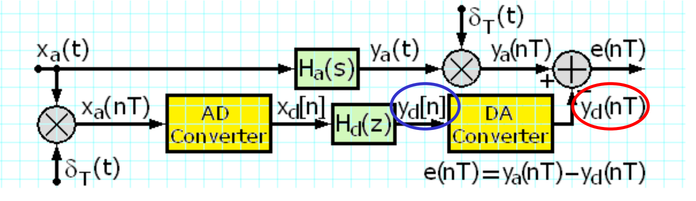
Pentru $x_a(t)=\frac{1}{T}\cdot\text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)$; $x_d[n]=\frac{1}{T}\delta[n]$;$h_d[n]=Th_a(nT)$

Transformarea Laplace a semnalului esantionat $y_a(nt)$ este

$$\hat{Y}_a(s)=\mathcal{L}\{y_a(t)\delta_T(t)\}=\mathcal{L}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_a(nT)\delta(t-nT)\right\}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_a(nT)\mathcal{L}\{\delta(t-nT)\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_a(nT)e^{-snT}$$

13



Transformata Z a semnalului de iesire pentru sistemul digital este

$$H_d(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_d[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}Th_a(nT)z^{-n}$$

$$\Rightarrow \hat{Y}_a(s)=\frac{1}{T}H_d(z)\Big|_{z=e^{sT}}$$

Dar pentru orice semnal esantionat avem: $\hat{Y}_a(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a(j\omega-jk\omega_s)$

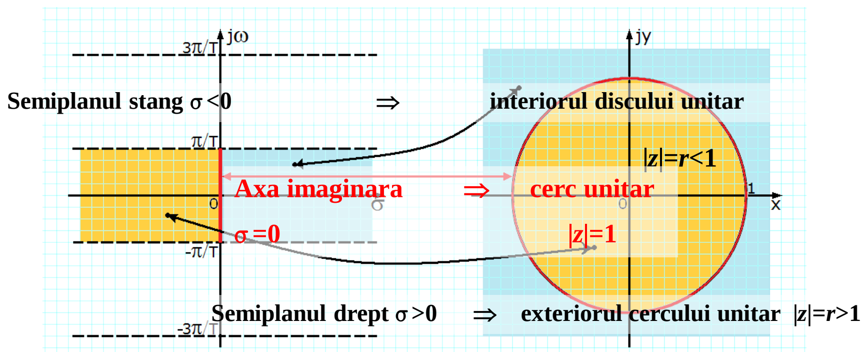
Inlocuind $j\omega=s$: $\hat{Y}_a(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a(s-jk\omega_s).$

$$\boxed{H_d(z)\Big|_{z=e^{sT}}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}H_a(s-jk\omega_s)\ ;\omega_s=\frac{2\pi}{T}}$$

14

Relaţia dintre planele s şi z în cazul invarianţei răspunsului la impuls

$$s=\sigma+j\omega\,;z=re^{j\Omega}\,;z=e^{sT}\Rightarrow re^{j\Omega}=e^{\sigma T}\cdot e^{j\omega T}\Leftrightarrow\begin{cases} r=e^{\sigma T}\\ \omega T=\Omega+2k\pi\end{cases}$$



segmentul [-π/T, π/T) pe axa imaginara ⇒ o infasurare pe cercul unitate

15

- Pentru a evita erorile de tip alias, in raspunsul in frecventa al sistemului digital echivalent, este necesar ca raspunsul in frecventa al sistemului analogic sa fie cuprins in intregime in banda de frecvente -π/T , π/T.
- Deci sistemul analogic de banda limitata:

$$\omega_M<\pi/T$$

- cu frecventa de esantionare

$$\omega_s=2\pi/T\geq 2\omega_M$$

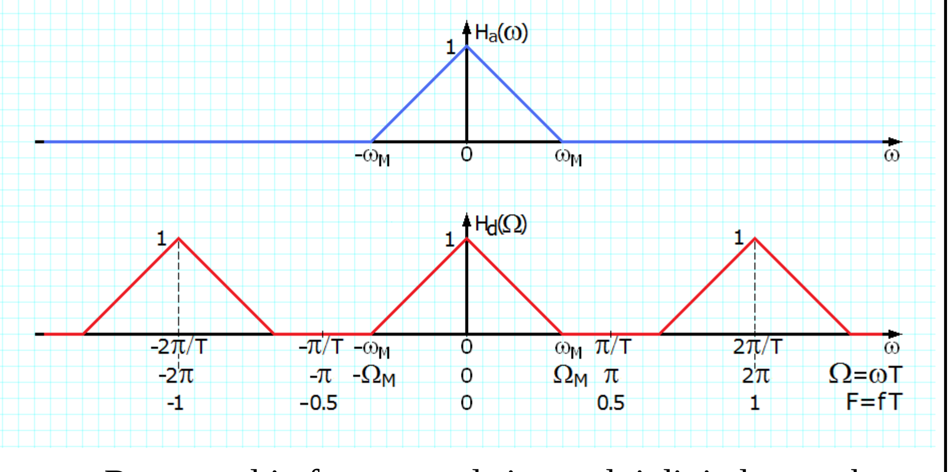
16

Relaţia între răspunsurile în frecvenţă ale sistemelor echivalente în cazul invarianţei răspunsului la impuls

$$H_d(z)\Big|_{z=e^{sT}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - j\frac{2k\pi}{T}\right);\ z = e^{j\Omega};\ s = j\omega \Rightarrow$$

$$H_d\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)\Bigg|_{\omega=\frac{\Omega}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(\frac{\Omega - k2\pi}{T}\right).$$

17



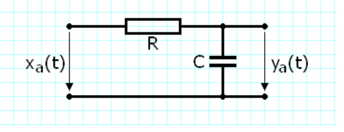
- Raspunsul in frecventa al sistemului digital ~ comb

F=fT – frecventa normata.

Frecventa de esantionare normata este F_s=1

18

Exemplu: circuitul RC



Sistem de banda nelimitata $\Rightarrow$ erori de aliere (aliasing)

$$RC\frac{dy_a(t)}{dt}+y_a(t)=x_a(t)\Rightarrow\ H_a(s)=\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_0}}\ ;\omega_0=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{RC}.$$

raspunsul in frecventa $H_a(\omega)=\dfrac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}=\dfrac{\omega_0}{\omega_0+j\omega}.$

Sistemul analogic: $h_a(t)=\omega_0 e^{-\omega_0 t}\sigma(t)=\dfrac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\sigma(t).$

Sistemul digital: $h_d[n]=Th_a(nT)=\dfrac{T}{\tau}e^{-\frac{nT}{\tau}}\sigma[n].$

19

Raspunsul la impuls al sistemului discret este

$$h_d[n]=Th_a(nT)=\frac{T}{\tau}e^{-\frac{nT}{\tau}}\sigma[n].$$

cu conditia ca pasul de esantionare T sa fie suficient de mic in comparatie cu τ (constanta de timp a circuitului)

Deoarece sistemul nu este de banda limitata,

apar erorile de aliere (raspunsul in frecventa al sistemului digital este afectat la frecventa mari)

20

Raspunsurile indiciale s(t), s[n] al sistemelor analogic si digital la semnalele treapta unitara σ(t), σ[n]

$$Y_a(s) = H_a(s)X_a(s) = \frac{\omega_0}{(\omega_0 + s)s} \longleftrightarrow y_a(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\sigma(t)$$

$$Y_d(z) = H_d(z)X_d(z) = \frac{\frac{T}{\tau}}{\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow y_d[n] = \frac{T}{\tau} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \cdot e^{-\frac{nT}{\tau}}\right)\sigma[n]$$

Eroarea: $e(nT) = y_a(nT) - y_d(nT) \neq 0$

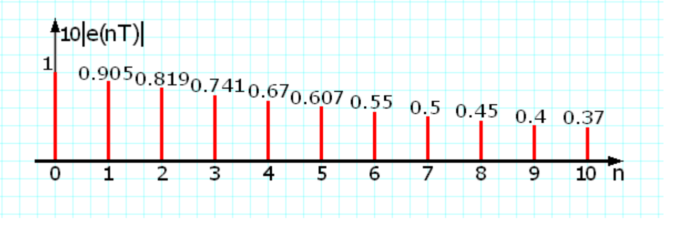
21

Pentru $n \geq 0 : y_a(nT) = 1 - e^{-\frac{nT}{\tau}}$,

$y_d(nT) \cong 1 - \left(1 - \frac{T}{\tau}\right)e^{-\frac{nT}{\tau}}$, daca $\frac{T}{\tau} << 1$.

$\Rightarrow e(nT) \cong -\frac{T}{\tau}e^{-\frac{nT}{\tau}}$, $\frac{T}{\tau} << 1$, $n \geq 0$.

Pentru $\frac{T}{\tau} = \frac{1}{10}$, $e^{-\frac{T}{\tau}} \cong 0,905$, eroarea este: $|e(nT)| \cong 0,1 e^{-\frac{n}{10}}$.



Pentru valori mai mici ale raportului T/τ, eroare este chiar mai mica

22

Pentru $T/\tau = \omega_0 T = \omega_0 \frac{2\pi}{\omega_s} = 0.1$

Frecventa de esantionare este: $\omega_s = 20\pi\omega_0$

La $\omega = \frac{\omega_s}{2} = 10\pi\omega_0$, modulul raspunsului in frecventa al sistemului analogic

$$\left|H\left(10\pi\omega_0\right)\right| = \frac{1}{\left|1 + j10\pi\right|} \cong \frac{1}{10\pi} \cong 0.0318$$

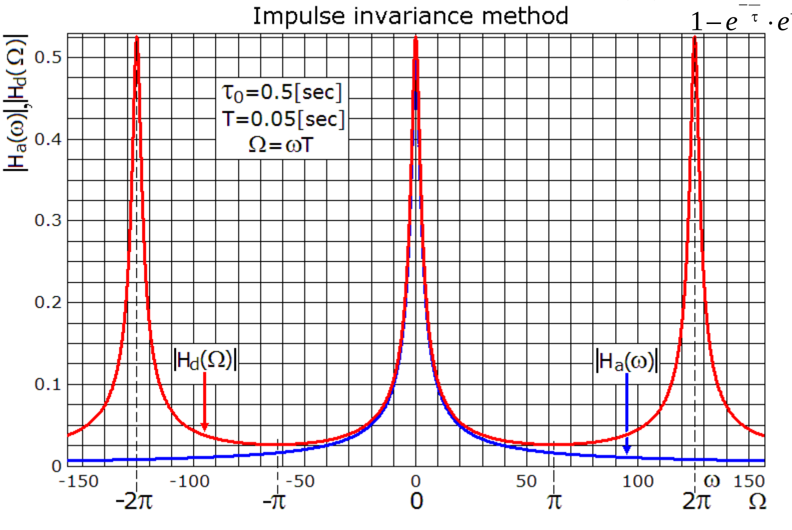
$$20\log\left|H\left(10\pi\omega_0\right)\right| \cong -30dB$$

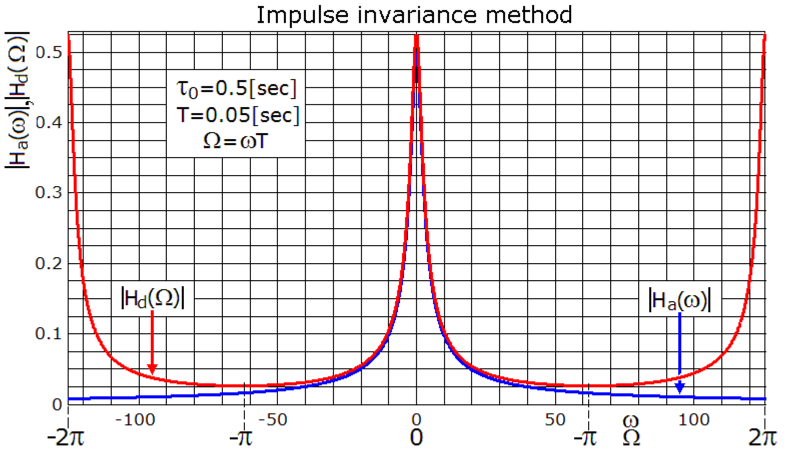
ceea ce inseamna ca eroarea de aliere este neglijabila

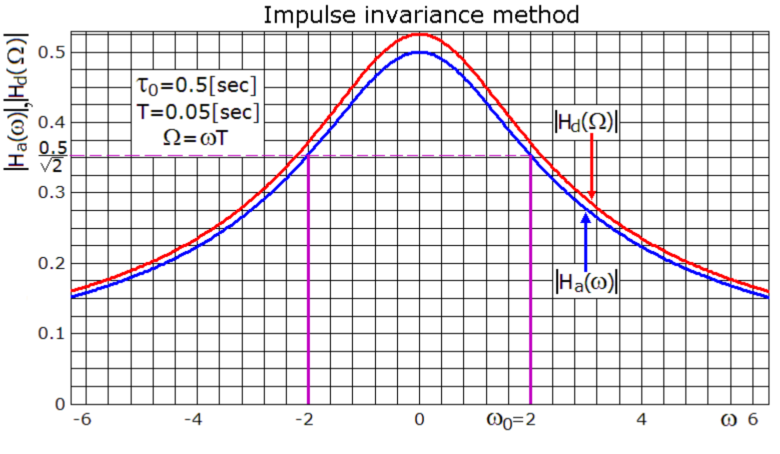
Raspunsul in frecventa

$$H_a(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{\tau} + j\omega};$$

$$H_d(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}} \cdot e^{-j\Omega}}$$




Impulse invariance method
$|H_a(\omega)|,|H_d(\Omega)|$
τ_0=0.5[sec]
T=0.05[sec]
$\Omega=\omega T$
$|H_d(\Omega)|$
$|H_a(\omega)|$
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-100
-50
0
50
100
ω
Ω
-2π
-π
0
-π
2π


Impulse invariance method
$|H_a(\omega)|,|H_d(\Omega)|$
τ_0=0.5[sec]
T=0.05[sec]
$\Omega=\omega T$
$|H_d(\Omega)|$
$|H_a(\omega)|$
0.5
0.4
$\frac{0.5}{\sqrt{2}}$
0.3
0.2
0.1
0
-6
-4
-2
0
ω_0=2
4
ω 6

26

2. Echivalarea sistemelor de banda limitata prin ***metoda invariantei raspunsului indicial***

$$\boxed{s_d[n] = s_a(nT)}$$

Semnalul de intrare: semnalul treapta

$$x_a(t) = \sigma(t) \longleftrightarrow X_a(s) = \frac{1}{s}$$

Raspunsul indicial al sistemului analogic

$$y_a(t) = h_a(t) * \sigma(t) \longleftrightarrow Y_a(s) = H_a(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Semnalul de intrare al sistemului digital :

$$x_d[n] = \sigma[n] \xleftrightarrow{Z} X_d(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Functia de transfer al sistemului digital:

$$H_d(z) = \left(1-z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H_a(s)}{s}\right\}(nT)\right\}$$

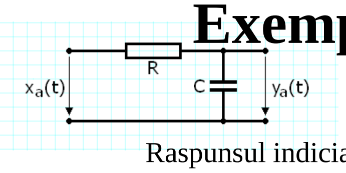
Raspunsurile indiciale:

$$s_a(t) = h_a(t) * \sigma(t) \quad \text{si} \quad s_d[n] = h_d[n] * \sigma[n]$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{H_d(z)}{1-z^{-1}}\right\}[n] = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H_a(s)}{s}\right\}(nT)$$

$$\Rightarrow s_d[n] = s_a(nT)$$

Exemplu: circuitul RC



$$RC\frac{dy_a(t)}{dt}+y_a(t)=x_a(t)$$

Raspunsul indicial

$$s_a(t)=\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\sigma(t)$$

Raspunsul indicial al sistemului digital echivalent

$$s_d[n]=\left(1-e^{-\frac{nT}{\tau}}\right)\sigma[n]$$

cu raspunsul la impuls

$$h_d[n]=\left(e^{\frac{T}{\tau}}-1\right)\left(e^{-\frac{nT}{\tau}}\sigma[n]-\delta[n]\right)\neq h_a(nT).$$

Pentru $\frac{T}{\tau}<<1$: $\quad h_d[n]\cong\frac{T}{\tau}e^{-\frac{nT}{\tau}}\sigma[n]-\frac{T}{\tau}\delta[n]$.

Sistemul digital echivalent, pentru $\frac{T}{\tau}<<1$:

$$h_d[n]\cong\frac{T}{\tau}e^{-\frac{nT}{\tau}}\sigma[n]-\frac{T}{\tau}\delta[n]\ .$$

- Daca se aplica la intrare impulsul Dirac

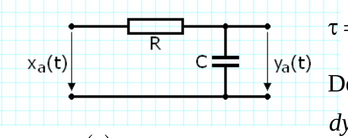
$$\delta(t)\Rightarrow h_a(t)$$

$$\delta[\mathrm{n}]\Rightarrow h_d[n]\neq h_a(nT)$$

Eroarea este

$$e(nT)=h_a(nT)-h_d[n]\cong\frac{T}{\tau}\delta[n]\ ,\ \frac{T}{\tau}<<1.$$

3. Echivalarea unui sistem analogic prin ***aproximarea ecuaţiei diferenţiale*** care îl descrie ***printr-o ecuaţie cu diferenţe finite***



$$RC\frac{dy_a(t)}{dt}+y_a(t)=x_a(t)$$

$$\tau=RC=\frac{1}{\omega_0}\Rightarrow\tau\frac{dy_a(t)}{dt}+y_a(t)=x_a(t)\Rightarrow H_a(s)=\frac{1}{1+s\tau}.$$

Derivata intai se poate aproxima prin :

$$\left.\frac{dy_a(t)}{dt}\right|_{t=nT}\cong\frac{y_a(nT)-y_a(nT-T)}{T}=\frac{y_d[n]-y_d[n-1]}{T}\Rightarrow$$

$$\frac{\tau}{T}(y_d[n]-y_d[n-1])+y_d[n]=x_d[n]\text{sau}$$

$$\left(\frac{\tau}{T}+1\right)y[n]-\frac{\tau}{T}y[n-1]=x[n],\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_d(z)=\frac{1}{\frac{\tau}{T}+1-\frac{\tau}{T}z^{-1}}=\frac{1}{1+\tau\frac{1-z^{-1}}{T}}=H_a(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}.$$

31

Un sistem analogic este descris de ecuatia diferentiala : $\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^k x(t)}{dt^k}\Rightarrow H_a(s)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N}a_k s^k}.$

Am utilizat deja aproximarea : $\left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t=nT}\cong\frac{u[n]-u[n-1]}{T}$. Aceasta aproximare reprezinta un caz particular (obtinut pentru $k=1$) al relatiei : $\left.\frac{d^k u(t)}{dt^k}\right|_{t=nT}\cong\frac{1}{T^k}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p C_k^p u[n-p]$. Transformata z a membrului drept este : $\frac{1}{T^k}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p C_k^p\left(z^{-1}\right)^k\cdot U(z)=\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^k U(z)$. Substituind aproximarile derivatelor in ecuatia diferentiala se obtine : $\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{1}{T^k}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p C_k^p y[n-p]=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{1}{T^k}\sum_{p=0}^{k}(-1)^p C_k^p x[n-p]$.

Luand in ambii membri transformata Z rezulta : $\sum_{k=0}^{N}a_k\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^k Y(z)=\sum_{k=0}^{M}b_k\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^k X(z)\Rightarrow$

$$H_d(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^k}{\sum_{k=0}^{N}a_k\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^k}.\ \text{Deci}:\ H_d(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}.$$

32

Relaţia dintre planele *s* şi *z* în cazul aproximării ecuaţiei diferenţiale printr-o ecuaţie cu diferenţe finite

$z = x + jy = re^{j\Omega}$ si $s = \sigma + j\omega$. S-a demonstrat relatia : $s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \Rightarrow z = \frac{1}{1 - sT}$ adica :

$r = |z| = \frac{1}{\sqrt{(1-\sigma T)^2 + (\omega T)^2}}$. Daca $\sigma < 0 \Rightarrow 1 - \sigma T > 1 \Rightarrow (1-\sigma T)^2 + (\omega T)^2 > 1 \Rightarrow r < 1$.

Semiplanul stang din planul s se transforma in interiorul cercului unitate din planul z.
Daca sistemul analogic este stabil si sistemul numeric echivalent va fi stabil.

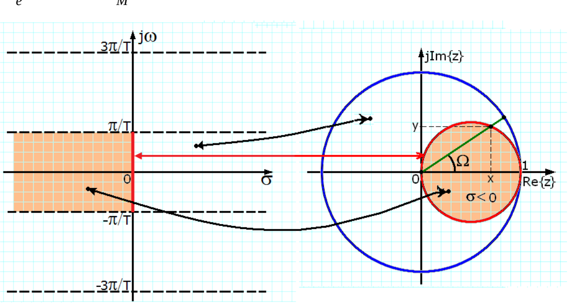
Daca $\sigma = 0 \Rightarrow s = j\omega \Rightarrow z = \frac{1}{1 - j\omega T} = \frac{1 + j\omega T}{1 + (\omega T)^2} = x + jy \Rightarrow x = \frac{1}{1 + (\omega T)^2}$; $y = \frac{\omega T}{1 + (\omega T)^2}$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \omega T \Rightarrow x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \Leftrightarrow x = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 .$$

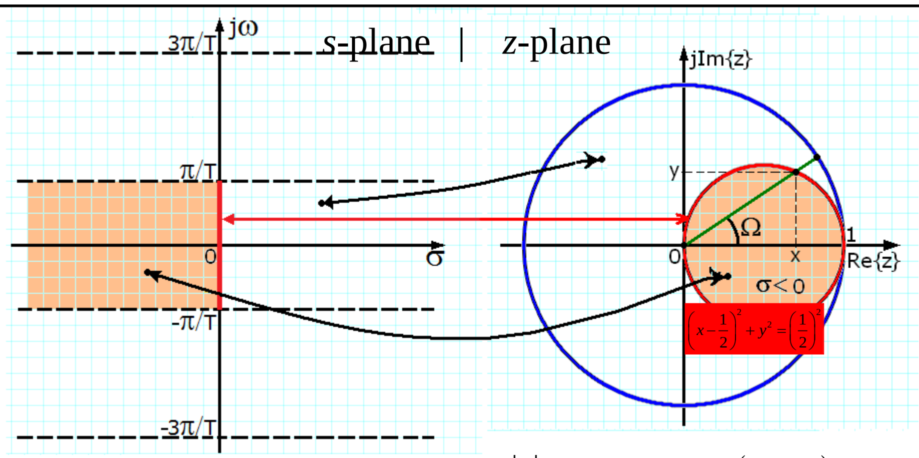
Axa imaginara din planul s se transforma in conturul cercului de centru $(1/2, 0)$ si de raza $1/2$ din planul z.

33

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. $\frac{y}{x} = tg\Omega = \omega T \Rightarrow \Omega = arctg\omega T$. Pentru ca sistemul numeric echivalent sa aiba raspuns in frecventa ar fi necesar ca axa imaginara din planul s sa se transforme in cercul unitate din planul z. Nu este cazul acestei metode de echivalare. Pentru $|\Omega| \le \frac{\pi}{36}$ cele 2 cercuri sunt foarte apropiate. Daca se noteaza cu ω_M frecventa maxima din raspunsul in frecventa $H_a(\omega)$ atunci conditia de mai sus se scrie : $\omega_M T = tg\Omega_M \cong \Omega_M \le \frac{\pi}{36}$. Frecventa de esantionare ω_e trebuie aleasa a. i. $\omega_e \ge 36 \cdot 2\omega_M$. Aceasta valoare este foarte mare.



34



Semiplanul stang $\sigma < 0 \;\Rightarrow$ **disc** $|z| < 1/2$, centru $= (1/2, 0)$

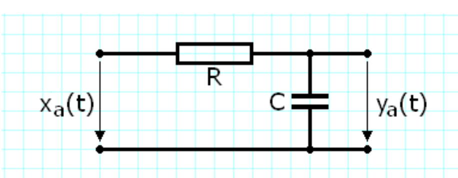
Semiplanul drept $\sigma > 0 \Rightarrow$ **exteriorul discului** $|z| > 1/2$, centru $= (1/2, 0)$

Axa imaginara $s = j\omega, \sigma = 0 \Rightarrow$ **disc** $|z| = 1/2$, centru $= (1/2, 0)$

$$z = \frac{1}{1 - j\omega T} = \frac{1 + j\omega T}{1 + (\omega T)^2} = x + jy$$

35

Exemplu: FTJ de ordinul intai



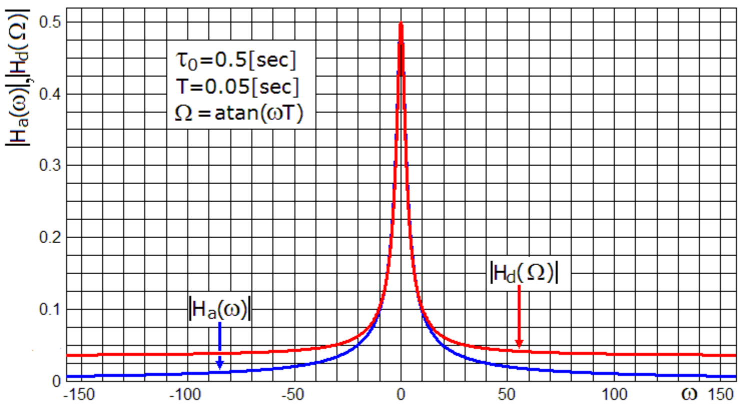
constanta de timp: $\tau = RC = \dfrac{1}{\omega_0}$.

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + s\tau}$$

$$H_d(z) = \frac{\dfrac{T}{T+\tau}}{1 - \dfrac{\tau}{T+\tau} z^{-1}}$$

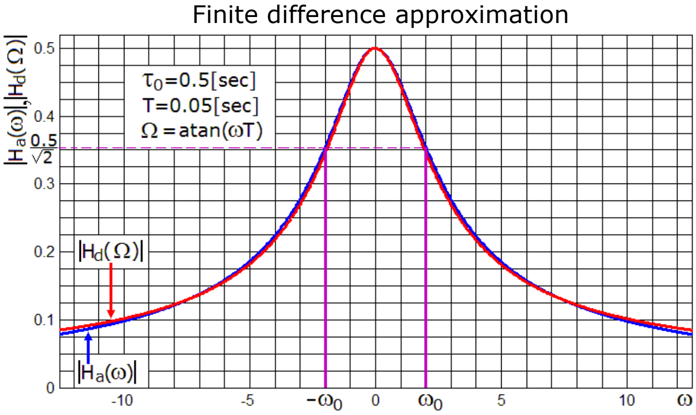
36

Finite difference approximation

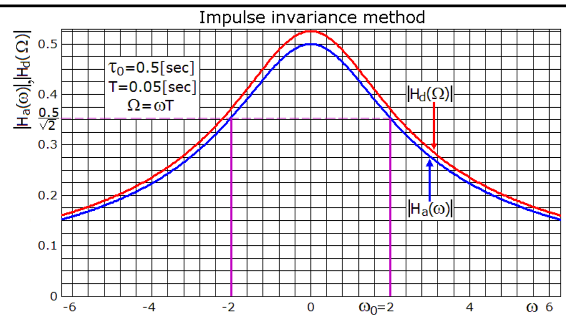


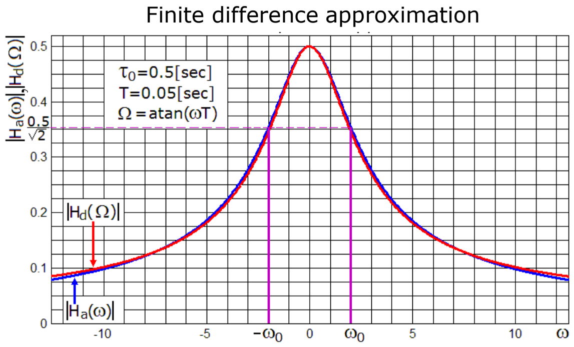
37

Finite difference approximation



38





Acuratete mai mare !

(fata de metoda invariantei raspunsului la impuls)

39

4. Echivalarea bazată pe ***transformarea biliniară***

Consideram cazul integratorului analogic, descris de ecuatia diferentiala:

$$\frac{dy}{dt} = x(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Rightarrow H_a(s) = \frac{1}{s}.$$

Integrala I_n poate fi calculata numeric folosind, metoda trapezelor.

Aria A_n poate fi aproximata cu aria trapezului ABCD.

$$I_n = y(nT) - y((n-1)T) = \int_{(n-1)T}^{nT} x(\tau)d\tau \cong \frac{(AB+CD)AD}{2} = \frac{\left[x(nT)+x((n-1)T)\right]T}{2}.$$

S-a obtinut:

$$y[n]-y[n-1] = \frac{T}{2}\left(x[n]+x[n-1]\right).$$

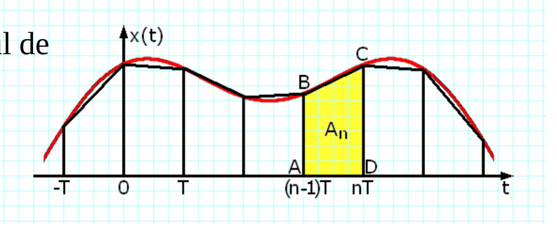
Aceasta este ecuatia cu diferente finite care caracterizeaza sistemul digital cu functia de transfer

$$H_d(z) = \frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}.$$

40

$$\frac{dy}{dt} = x(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Rightarrow H_a(s) = \frac{1}{s}$$

Semnalul de intrare



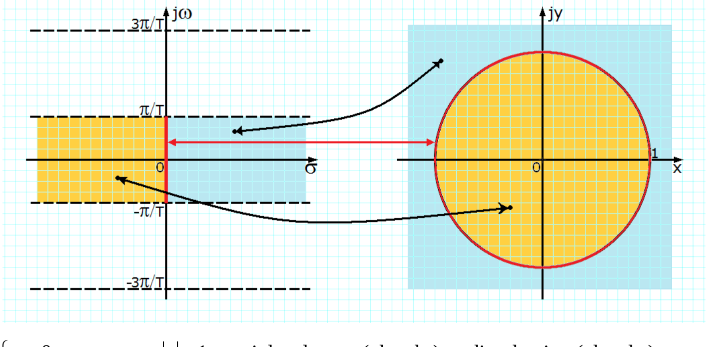
Aria A_n (ABCD)~ integrala I_n: metode numerice

$$\boxed{s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}; \qquad H_d(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}}$$

41

Relaţia dintre planele *s* şi *z* în cazul echivalării pe baza transformării biliniare

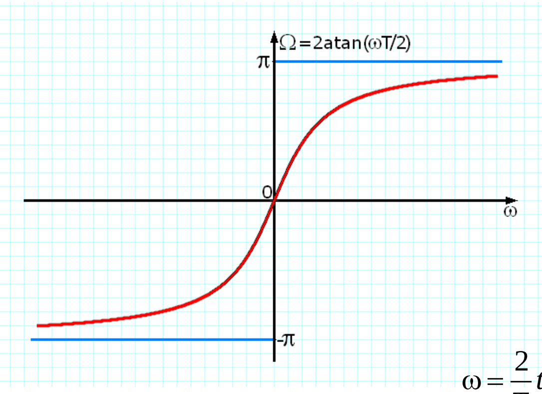
$$s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \Leftrightarrow z = \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{\left(1+\frac{T}{2}\sigma\right)^2+\left(\frac{T}{2}\omega\right)^2}{\left(1-\frac{T}{2}\sigma\right)^2+\left(\frac{T}{2}\omega\right)^2}} \Rightarrow \begin{cases} \sigma<0 & \Rightarrow & |z|<1 \\ \sigma=0 & \Rightarrow & |z|=1 \\ \sigma>0 & \Rightarrow & |z|>1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sigma<0 \;\Rightarrow\; |z|<1, \text{ semiplanul stang (planul s)} \Rightarrow \text{discul unitar (planul z)} \\ \sigma=0 \;\Rightarrow\; |z|=1, \text{ axa imaginara (planul s)} \Rightarrow \text{cercul unitar (planul z)} \\ \sigma>0 \;\Rightarrow\; |z|>1, \text{ semiplanul drept (planul s)} \Rightarrow \text{oexteriorul discului unitar (planul z)} \end{cases}$$

42

Relaţia între răspunsurile în frecvenţă ale sistemelor echivalente în cazul transformării biliniare



$$s = j\omega \Rightarrow z = \frac{1+j\frac{\omega T}{2}}{1-j\frac{\omega T}{2}} = 1\cdot e^{j2arctg\frac{\omega T}{2}} = re^{j\Omega}.$$

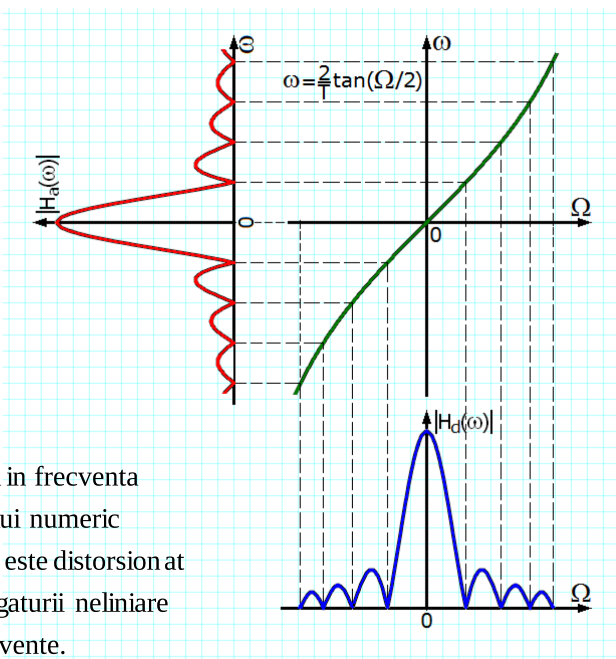
$$|z| = 1 \text{ si } \Omega = 2arctg\frac{\omega T}{2}.$$

Axa imaginara a planului s se transforma in cercul unitar din planul z.

Legatura dintre frecvente este :

$$\omega = \frac{2}{T} tg\frac{\Omega}{2} \quad \text{sau} \quad \Omega = 2\,\text{arctg}\frac{\omega T}{2}$$

43



Raspunsul in frecventa al sistemului numeric echivalent este distorsionat datorita legaturii neliniare dintre frecvente.

44