SEMINAR NR. 4

1. Sistemul M/M/1/∞

Caracteristici: $A = \frac{\lambda}{\mu} \langle \ 1$ - intensitatea traficului

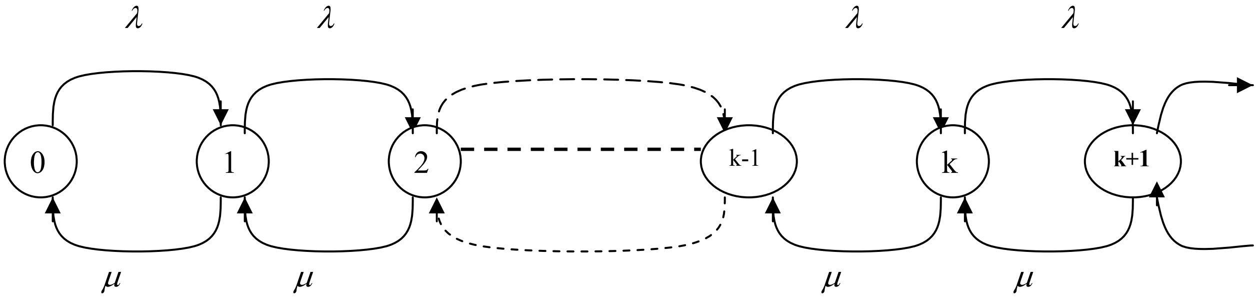

Figura 4.1 Reprezentarea evoluției sistemului prin graful de tranziții

unde

λ = rata medie de sosire a clienților în sistem (clienți /sec)

μ = rata medie de servire (clienți /sec)

- probabilitatea ca sistemul să se afle in starea k

$$p_k = A^k(1-A)$$

- probabilitatea ca sistemul monoserver să nu aibă nici un client

$$p_0 = 1 - A$$

- numărul mediu de clienți în sistem

$$\bar{n} = \frac{A}{1-A}$$

- timpul mediu de prezență în sistem

$$\bar{\tau} = \bar{ts} + \bar{ta} = \frac{T}{1-A} = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

cu $T = \frac{1}{\mu}$ = durata medie de serviciu

Problema 1

Fie un concentrator având 4 intrări cu debitul binar de 4800 bps şi o ieşire de 9600 bps. Dimensiunea medie a pachetului este de 1000 biți. Fiecare din cele 4 linii are un trafic Poisson cu rata medie a sosirilor $\lambda_i = 2$ pachete/s. Se cere:

a. Care este întârzierea medie a unui pachet?

b. Care este numărul mediu de pachete în concentrator (inclusiv cele din server)?

Rezolvare:

a. Întru-cât dimensiunea unui pachet este de 1000 biți, rezultă:

$$\frac{1}{\mu} = 1000$$

Rata medie de sosire este:

$$\lambda = 4\lambda_i = 4 \cdot 2 = 8 \text{ pachete/s}$$

Rata medie de servire este:

$$\overline{\mu} = \mu \cdot 9600 = \frac{1}{1000} \cdot 9600 = 9,6 \text{ pachete/s}$$

Timpul total de aşteptare:

$$\overline{\tau_i} = \frac{1}{\overline{\mu} - \lambda} = \frac{1}{9,6-8} = \frac{1}{1,6} = 0,625 \text{ secunde/pachet}$$

b. Numărul mediu de pachete în concentrator:

$$\overline{n} = \frac{A}{1-A}$$

$$A = \frac{\lambda}{\overline{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu \cdot 9600} = \frac{8}{9,6} = 0,833 \quad \Rightarrow n \cong 5$$

Deci, în medie, în sistem există 5 pachete (inclusiv cel din server).

Observație:

- Un concentrator asigură reducerea numărului de linii pornindu-se de la criterii statistice (numărul mediu de linii active), astfel încât există pericolul congestionării traficului.
- Există o probabilitate nenulă ca un număr mai mare de linii de intrare să dorească accesul, depăşind capacitatea concentratorului.
- Concentrarea traficului cu TDM static este atât o metodă de transmisie cât şi o metodă de comutație.
- Un concentrator gestionează căile de comunicație poate acționa asupra formatului şi debitului datelor, poate stoca temporar datele în memorie.
- De asemenea are rol de detecție şi corecție de erori şi poate oferi date statistice privind traficul.

Problema 2

Fie 8 terminale ce folosesc o linie de 64 kbps. Fiecare sursă de semnal generează un trafic Poisson cu o medie de 2 pachete /s. Lungimea pachetelor este în medie de 2000 biți. Care din următoarele soluții oferă un timp minim de întârziere a pachetelor:

a. cu canale dedicate (8 canale de 8 kbps fiecare)

b. cu canal partajat (64 kbps)

Rezolvare:

a. Soluția cu canale dedicate presupune ca fiecare canal de 8 kbps operează ca un sistem de aşteptare independent, având rata medie a sosirilor

$$\lambda = 2 \text{ pachete / s}$$

şi rata medie a servirilor

$$\overline{\mu} = 8000 \cdot \frac{1}{2000} = 4 \,.$$

Din acestea rezultă că timpul de aşteptare $\overline{\tau_i} = \dfrac{1}{4-2} = 0,5 \text{ s}$

b. Soluția cu canal partajat de 64 kbps presupune:

O rată medie de sosire:

$$\overline{\lambda_p} = 8\lambda_i = 16 \text{ pachete/s}$$

O rată medie a servirilor

$$\overline{\mu_p} = 8 \cdot 4 = 32 \text{ pachete/s}$$

Rezultă timpul mediu de aşteptare ca fiind:

$$\overline{\tau} = \frac{1}{\overline{\mu_p} - \overline{\lambda_p}} = \frac{1}{32-16} = 0,0625 \text{ s/pachet}$$

Atunci, rezultă că împărțind un canal în k părți fixe, timpul de răspuns creşte de k ori.

2. Sistemul M/M/1/N

Caracteristici

$$\sum_{k=0}^{N} p_k = 1$$

$$p_0 = \frac{1-A}{1-A^{N+1}}$$

$$p_N = p_0 A^N = A^N \frac{1-A}{1-A^{N+1}}$$

λ = rata medie a intrărilor

$\lambda p_N =$ rata medie a intrărilor refuzate din cauza umplerii bufferului

$\Rightarrow$ rata medie a intrărilor acceptate (productivitatea sistemului) $\gamma = \lambda(1-p_N)$

Problema 3

Fie un sistem de cozi de aşteptare care are o intensitate a traficului de 0,5. Ştiind că se foloseşte modelul M/M/1/N, cu probabilitatea de blocare de 0.001, să se dimensioneze bufferul.

Rezolvare:

$$p_N = 0.001 = (0.5)^N \frac{1-0.5}{1-(0.5)^{N+1}}$$

Rezultă:

$$N = 8+1 = 9$$

Bufferul sistemului monoserver este egală cu 8 .

3. Sistemul M/M/N/∞

Caracteristici:

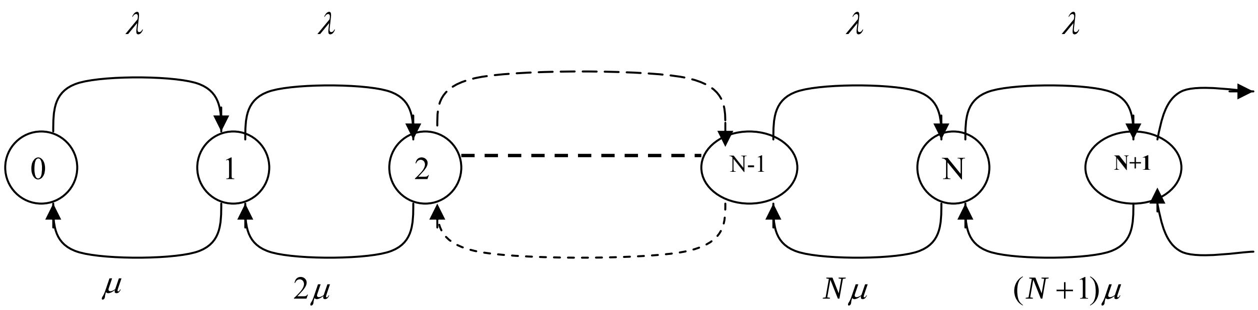

Figura 4.2 Graful de tranziții

$$p_k^{(1)} = p_0 \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(j+1)\mu} = \frac{A^k}{k!} p_0 \quad ; \text{cu } k < N$$

$$p_k^{(2)} = p_0 \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(j+1)\mu} \prod_{j=N}^{k-1} \frac{\lambda}{N\mu} = p_0 \frac{A^N}{N!} \left(\frac{A}{N} \right)^{k-N}$$

Unde:

$$A = \frac{\lambda}{\mu}$$

Probabalitatea ca sistemul să nu aibă nici un client

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^N}{N!} \bullet \frac{N}{N-A}\right]^{-1}$$

Probabilitatea de aşteptare:

$$P_a = p_0 \frac{N}{N-A} \frac{A^N}{N!} \rightarrow Erlang - C = E_2(N, A)$$

Numărul mediu de clienți care aşteaptă în şir:

$$\bar{u} = \frac{A}{N-A} E_2(N, A)$$

Durata medie de aşteptare în sistem (raportate la toate unitațile din sistem)

$$\bar{t}_a = \frac{\bar{u}}{\lambda} = \frac{A}{\lambda(N-A)} E_2(N, A) = \frac{T}{N-A} E_2(N, A)\text{, unde } T = \frac{1}{\mu}$$

Timpul mediu de staționare în sistem (inclusiv servirea)

$$\bar{\tau} = ts + ta = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} \frac{1}{N-A} E_2(N, A) = T(1 + \frac{1}{N-A} E_2(N, A))$$

Problema 4

Un nod de comutație de pachete are 2 linii de ieşire şi debitul maxim de 1200 bps. Fluxul de intrare de 1 pachet la 4 secunde se împarte aleatoriu la cele 2 linii. Ştiind că lungimea medie a unui pachet este de 5500 biți şi că în nod se adaugă un antet de 500 biți, se cere să se determine:

a. Care este numărul mediu de pachete în nod şi care este timpul mediu de aşteptare. Se va lua sistemul M/M/2/∞.

b. Ce se întâmplă dacă o linie se defectează?

c. Dacă sistemul este cu buffer finit (N=9), care este probabilitatea de blocare în nod la punctul b?

Rezolvare

a. Rata medie de sosire

$$\lambda = 1 \text{ pachet / 4s} = 0{,}25 \text{ pachete / s}$$

Lungimea totală a unui pachet $= 5500 + 500 = 6000$ biți

$\Rightarrow$ timpul de servire $\frac{1}{\mu} = \frac{6000}{1200} = 5s$

Intensitatea traficului pentru sistemul cu 2 servere

$$A' = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{0,25}{2 \cdot 0,2} = 0,62$$

$$\overline{t_a} = \frac{T}{N-A} E_2(N, A)$$

$$E_2(N, A) = p_0 \frac{2}{2-A} \frac{A^2}{2!} = p_0 \frac{A^2}{2-A}$$

Calculăm p_0:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^2}{2!} \frac{2}{2-A} \right]^{-1} = \left(1 + A + \frac{A^2}{2-A} \right)^{-1} = \left(\frac{2+A}{2-A} \right)^{-1} = \frac{2-A}{2+A}$$

$$E_2(2, A) = \frac{2-A}{2+A} \frac{A^2}{2-A} = \frac{A^2}{2+A}$$

Numărul mediu de pachete în nod (numărul mediu de clienți în sistem) $\Rightarrow$ conf. Little

$$\overline{n} = \lambda \overline{\tau} = \frac{\lambda}{\mu} \left(1 + \frac{1}{N-A} E_2(N, A) \right) = A \left(1 + \frac{1}{2-A} \frac{A^2}{2+A} \right) = \frac{4 \cdot 1.25}{4 - 1.25^2} = 2.08$$

unde

$$A = \frac{\lambda}{\mu} = 0.25 \cdot 5 = 1.25$$

Timpul mediu de aşteptare:

$$\overline{t_a} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{N-A} E_2(N, A) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{2-A} \cdot \frac{A^2}{2+A} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{A^2}{4-A^2} = 5 \cdot \frac{(1.25)^2}{4-(1.25)^2} = 2.08$$

b. Dacă o linie de ieşire se defectează atunci rămâne doar un server şi intensitatea traficului devine:

$$A' \to A = \frac{\lambda}{\mu} = 1.25 > 1$$

$\Rightarrow$ apare congestia

c.

$$p_9 = p_0 A^N = A^N \frac{1-A}{1-A^{N+1}} = (1.25)^9 \frac{1-1.25}{1-(1.25)^{10}} \approx 0.22$$

Problema 5

Folosind schema procesului de naştere şi moarte calculati pe baza grafului probabilitățile limită pentru un sistem cu două servere ($N = 2$) şi 3 locuri in coada de aşteptare pentru: $\lambda = 0,6;\quad \mu = 0,2;\quad A = 3$. Găsiți caracteristicile sistemului de aşteptare $\overline{n},\ \overline{u},\ \overline{v},\ \overline{\tau},\ \overline{t_a}$.

Rezolvare:

În acest caz avem un sistem de tipul $M/M/2/2+3$ descris de graful din figură:

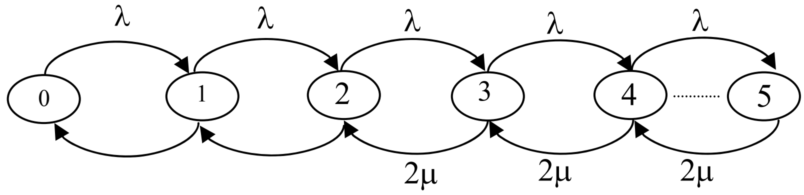

Figura 4.3

Starea 0 – nici o unitate în sistem

Starea1 - un server ocupat

Starea 2 – 2 servere ocupate

Starea 3 - 2 servere ocupate şi 1 unitate aşteaptă în coadă

Starea 4 - 2 servere ocupate şi 2 unităţi aşteaptă în coadă

Starea 5 - 2 servere ocupate şi 3 unităţi aşteaptă în coadă

Ecuatii echilibrelor locale:

$$p_0\lambda = p_1\mu \qquad p_1 = p_0\frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_0\lambda + p_2 2\mu = p_1(\lambda+\mu) \qquad p_2 = p_0\frac{\lambda^2}{2\mu^2}$$

rezultă $p_n = p_0\dfrac{\lambda^n}{2^{n-1}\mu^n}$

Ecuația de normare este de forma:

$$p_0 + p_0\frac{\lambda}{\mu} + p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\frac{1}{2^{2-1}} + p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\frac{1}{2^{3-1}} + p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4\frac{1}{2^{4-1}} + p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5\frac{1}{2^{5-1}} = 1$$

Rezultă:

$$p_0 = 0,025$$
$$p_1 = p_0 A = 0,074$$
$$p_2 = p_0\frac{A^2}{2} = 0,111$$
$$p_3 = p_0\frac{A^3}{4} = 0,165$$
$$p_4 = p_0\frac{A^4}{8} = 0,25$$
$$p_5 = p_0\frac{A^5}{16} = 0,375$$

$$\overline{n} = \sum_{k=0}^{5} kp_k = 3,67$$

$$\overline{u} = \sum_{k=3}^{5} (k-3)\, p_k = 1,79$$

$$\overline{v} = \overline{n} - \overline{u} = 1,88$$

Relația lui Little:

$$\overline{n} = \overline{\tau}\lambda$$

$$\overline{\tau} = \frac{\overline{n}}{\lambda} = 6,11$$

$$\overline{t_a} = \frac{\overline{u}}{\lambda} = 2,98$$