SEMINARUL 3

3. Procese Markov

În cadrul proceselor aleatoare un loc deosebit îl ocupă procesele Markov caracterizate prin aceea că apariția unei anumite stări este condiționată doar de un număr determinat de stări anterioare. Dacă numărul acestor stări anterioare este r, atunci este vorba de un proces Markov de ordinul r.

Procesele Markov de ordinul 1 ocupă un loc important în studiul proceselor de trafic ce caracterizează rețeaua de telecomunicații în ansamblul ei. Înseamnă că dacă un sistem se află la momentele de timp $t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots$ în stări $N(t_0), N(t_1), \ldots, N(t_j), \ldots$ şi dacă el se comportă ca un sistem Markov de ordinul 1, atunci probabilitatea ca la un moment următor t_{j+1} starea lui să fie $N(t_{j+1})$ este determinată doar de starea lui din momentul anterior, adică:

$$\begin{aligned} &P\{N(t_{j+1}) = k \,|\, N(t_0) = n_0, N(t_1) = n_1, \ldots, N(t_j) = n\} = \\ &\quad = P\{N(t_{j+1}) = k \,|\, N(t_j) = n\} = p_k(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Cu alte cuvinte aceasta se exprimă prin formularea: *starea viitoare k depinde doar de starea prezentă n* sau *starea prezentă înglobează în ea întregul trecut.* Se mai obişnuieşte să se spună că *procesele Markov sunt procese fără memorie.*

Pentru orice sistem este caracteristic **vectorul de stare $\mathbf{p}(t)$**. El este structurat ca un vector linie, având ca elemente probabilitățile absolute $p_n(t)$ ale tuturor stărilor n ale sistemului ($0 \le n \le \infty$), adică:

$$\mathbf{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \ldots, p_n(t), \ldots) \tag{3.2}$$

cu $0 \le p_n(t) \le 1$ şi $\sum_{(n)} p_n(t) = 1$.

Dacă se consideră evoluția unui astfel de sistem între două momente successive t şi $t + \Delta t$, înseamnă că o stare k oarecare poate fi obținută printr-un salt executat în intervalul Δt dinspre oricare altă stare a sistemului fie ea 0,1,2,....., sau n.

În figura 3.1 se prezintă grafic această evoluţie corespunzătoare unui proces Markov de ordinul 1. Stările sistemului numerotate începând cu 0, sunt reprezentate prin cercuri, iar prin săgeţi sunt figurate eventualele tranziţii între stări. Pe fiecare săgeată sunt notate probabilităţile de tranziţie:

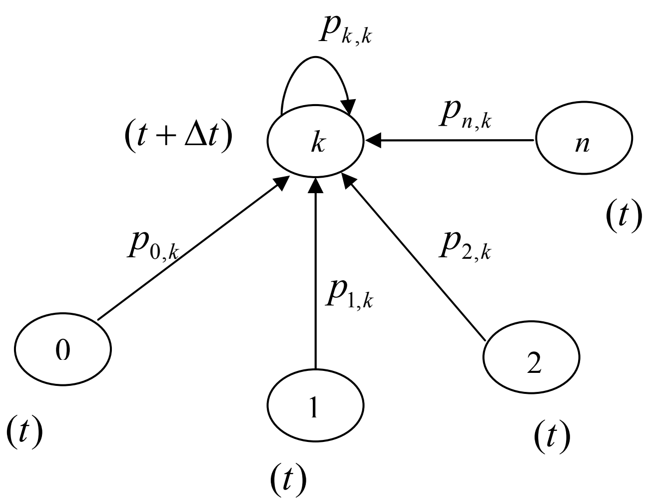


Fig. 3.1 Tranziţii între stări la modelul Markov

$$p_{n,k}(\Delta t) = P\{N(t+\Delta t) = k \,|\, N(t) = n\} \tag{3.3}$$

Cu alte cuvinte, pentru ca la momentul $t+\Delta t$ sistemul să se afle într-o stare nouă k, trebuie ca plecând din starea prezentă n la momentul t să aibe loc tranziţia: $n \to k$, adică:

$$\text{starea } k(t+\Delta t) = \bigcup_{(n)} \{\text{starea } n(t) \cap \text{salt } n \to k\} \tag{3.4}$$

ceea ce în termini probabilistici se poate scrie ca:

$$p_k(t+\Delta t) = \sum_{(n)} p_n(t) \cdot p_{n,k}(\Delta t) \tag{3.5}$$

Această relaţie reprezintă modul de exprimare matematică a caracterului Markovian al procesului, în care starea viitoare k nu depinde decât de starea prezentă n.

Relaţia 3.5 poate fi scrisă şi sub formă matriceală. Toate probabilităţile de tranziţie $p_{n,k}$ sunt grupate într-o **matrice de tranziţii T** (vezi tabelul 3.1), o matrice pătratică ce are ca dimensiune numărul total de stări posibile ale sistemului. În această matrice suma elementelor fiecărei linii este egală cu unitatea. Se obţine astfel relaţia matriceală:

$$\mathbf{p}(t+\Delta t) = \mathbf{p}(t)\cdot \mathbf{T} \quad sau \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)\cdot \mathbf{T}^t \tag{3.6}$$

care face posibilă determinarea vectorului de stare a sistemului în orice moment de timp, pe baza matricei de tranziţii şi a vectorului de *stării* vide.

3.1 Procesul general de naştere şi moarte

Orice reţea de telecomunicaţii funcţionează conform unor procese în echilibru statistic, în care apelurile (cererile de serviciu) se nasc, aşteaptă servirea, trăiesc o viaţă atingând o anumită vârstă, pentru ca apoi în final să moară.

Procesele de naştere şi moarte ca subclasă importantă a proceselor Markov de ordinul I se adaptează perfect modului de apaiţie şi de servire a traficului în sistemul global de telecomunicaţii. Aceste procese sunt caracterizate de un spaţiu discret de stări şi de un parametru temporal continuu.

Prin definiţie, un proces de naştere şi moarte autorizează pentru un sistem, care la momentul t se află în starea $k=n$, tranziţia la momentul următor $t'(t'>t)$ numai către stările adiacente $k=n+1$ sau $k=n-1$ şi evident că starea k poate fi menţinută şi la momentul următor t'.

Evoluţia dinamică a unui sistem conform unui proces de naştere şi moarte poate fi reprezentată ca în fig. 3.2 sub forma unui lanţului Markov liniar cu număr finit $N+1$ de stări.

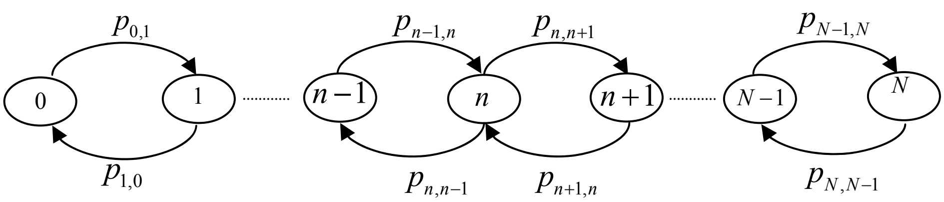


Fig. 3.2 Lanţ Markov liniar (proces general de naştere şi moarte)

Pentru simplificarea desenului nu s-a reprezentat decât pentru starea n tranziţia de tip $n \to n$ (fluxul intern de probabilităţi $p_{n,k}$); de asemenea nu este marcat nici intervalul $\Delta t = t' - t$ în care se pot produce tranziţiile, controlate prin termeni de tipul $p_{n,k}(t)\Delta t$. De fapt $p_{n,k}(t)$ apare ce o rată a schimbării de stare şi care multiplicată prin Δt măsoară chiar probabilitatea tranziţiei $n \to k$.

Pe durata intervalului Δt nu posate avea loc decât cel mult o singură tranziție, iar aceasta este permisă doar între stări adiacente. Deci conform relației 3.5, se poate scrie că:

$$p_n(t+\Delta t) = p_{n-1}(t)p_{n-1,n}(\Delta t) + p_{n+1}(t)p_{n+1,n}(\Delta t) + p_n(t)[1 - p_{n,n+1}(\Delta t) - p_{n,n-1}(\Delta t)] \quad (3.7)$$

În regim staționar, probabilitățile stărilor sunt independente de timp, iar valoarea probabilității de tranziție depinde, în mod direct proporțional, de lungimea intervalului în care are loc tranziția şi de rata $p_{n,k}$ a schimbării de stare, care este o constantă reală pozitivă, adică:

$$p_{n,k}(\Delta t) = p_{n,k}\Delta t + o(\Delta t) \quad (3.8)$$

Cu $o(\Delta t)$ este notat indicele Landau definit astfel:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \quad (3.9)$$

Aşa după cum s-a recizat anterior, pentru orice proces Markov se poate forma matricea **T** de tranziție, ale cărei elemente sunt probabilitățile de tranziție între stări. În condițiile echilibrului statistic se obține **ecuația echilibrului global** scrisă ca în relația (3.10) şi care probabilistic exprimă faptul că suma fluxurilor de ieşire de probabilități dintr-o stare este identic egală cu suma fluxurilor de intrare:

$$p_n(p_{n,n+1} + p_{n,n-1}) = p_{n-1}p_{n-1,n} + p_{n+1}p_{n+1,n} \quad (3.10)$$

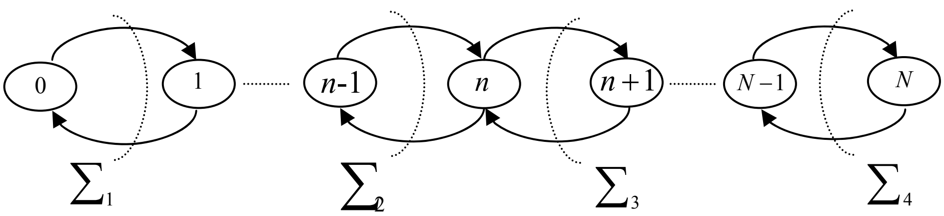


Fig.3.3 Suprafețele de conservare a fluxurilor de probabilități (I)

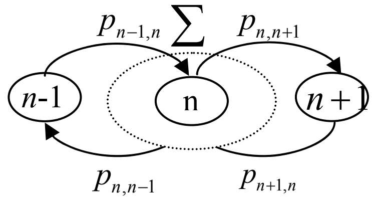


Fig. 3.4 Suprafeţele de conservare a fluxurilor de probabilităţi (II)

Se pot deduce deasemenea **ecuaţiile echilibrelor locale** după cum urmează:

$$\begin{aligned} &p_1 p_{1,0} = p_0 p_{0,1}; \qquad && p_{N-1} p_{N-1,N} = p_N p_{N,N-1}; \\ &p_{n-1} p_{n-1,n} = p_n p_{n,n-1}; \qquad && p_n p_{n,n+1} = p_{n+1} p_{n+1,n}; \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ultimele două relaţii din 3.11 indică faptul că în ecuaţia echilibrului global termenii din cei doi membrii sunt egali doi câte doi, adică **pentru o stare** n **tranziţiile ascendentă şi descendentă sunt echiprobabile.**

Dacă se consideră variaţia continuă a parametrului *timp*, atunci plecând de la (3.5) este adevărat că:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_k(t+\Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{(n \neq k)} p_n(t) \cdot \frac{p_{n,k}(t)}{\Delta t} + \quad p_k(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{k,k}(\Delta t) - 1}{\Delta t} \tag{3.12}$$

Se formează în consecinţă **matricea infinitezimală** $\mathbf{Q}$, ale cărei elemente sunt constante reale şi anume:

$$\begin{aligned} q_{n,k} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{n,k}(\Delta t)}{\Delta t} \\ q_{k,k} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{k,k}(\Delta t) - 1}{\Delta t} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Relaţia (3.12) devine:

$$p_k^{'}(t) = \sum_{(n \neq k)} p_n(t) \cdot q_{n,k} + p_k(t) \cdot q_{k,k} \tag{3.14}$$

Sau sub forma cunoscută ca şi **ecuaţia viitorului:**

$$\mathbf{p}^{'}(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q} \tag{3.15}$$

Trebuie precizat că elementele matricei infinitezimale $\mathbf{Q}$ (vezi tabelul 3.1) se deduc uşor din cele ale matricei de tranziţii $\mathbf{T}$.

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{T} - \mathbf{I}) \tag{3.16}$$

3.2 Procesul de naştere pură

Un proces de naştere pură are o evoluţie ca cea prezentă în figura 3.5 în care s-a considerat un proces trunchiat, adică s-a presupus un set finit de $N+1$ stări.

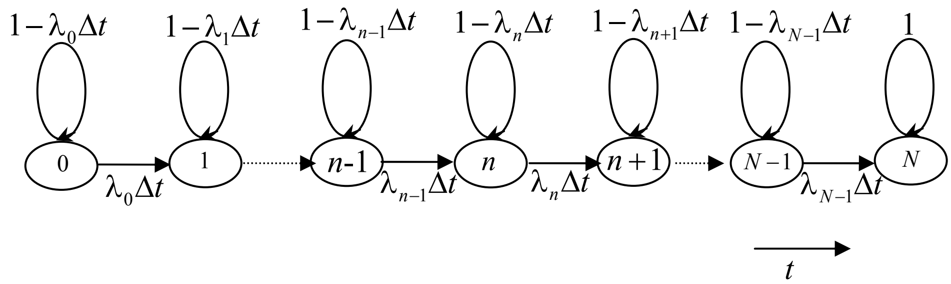


Fig. 3.5 Lanţul tranziţiilor într-un proces de naştere pură

În raport cu o stare $N(t) = n$, pentru un moment de timp t, în intervalul imediat următor Δt sunt posibile doar următoarele două evoluţii:

- Apare o naştere:

$$prob\{N(t+\Delta t) = n+1 \,|\, N(t) = n\} = p_{n,n+1}(\Delta t) \tag{3.17}$$

- Nu se întâmplă nimic:

$$prob\{N(t+\Delta t) = n \,|\, N(t) = n\} = p_{n,n}(\Delta t) \tag{3.18}$$

Ceea ce înseamnă că:

$$p_{n,n+1}(\Delta t) + p_{n,n}(\Delta t) = 1 \tag{3.19}$$

Procesul este omogen şi probabilităţile de tranziţie nu sunt funcţii de timp. Ele sunt proporţionale cu Δt, adică:

$$p_{n,n+1}(\Delta t) = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$$
$$p_{n,n}(\Delta t) = 1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t) \qquad (3.20)$$

λ_n reprezintă rata medie de naşteri adică numărul mediu de cereri de serviciu ce apar în unitatea de timp.

Mărimea intervalului de tranziţie Δt este în aşa fel aleasă încât probabilitatea de a avea mai mult de o naştere în Δt să fie un infinit mic de ordin superior lui Δt, adică $o(\Delta t)$.

Tabelul 3.1 Matricea T pentru procesul de naştere pură

Stări	Stări în $t+\Delta t$								
în t	0	1	....	n-1	n	n+1	...	N-1	N
0	$1-\lambda_0\Delta t$	$\lambda_0\Delta t$		0	0	0		0	0
1	0	$1-\lambda_1\Delta t$		0	0	0		0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
n-1	0	0		$1-\lambda_{n-1}$	$\lambda_{n-1}\Delta t$	0		0	0
n	0	0		0	$1-\lambda_n\Delta t$	$\lambda_n\Delta t$		0	0
n+1	0	0		0	0	$1-\lambda_{n+1}\Delta t$		0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
N-1	0	0		0	0	0		$1-\lambda_{N-1}\Delta t$	$\lambda_{N-1}\Delta t$
N	0	0		0	0	0		0	1

Tabelul 3.2 Matricea Q pentru procesul de naştere pură

Stări	Stări în $t+\Delta t$								
în t	0	1	....	n-1	n	n+1	...	N-1	N
0	$-\lambda_0$	λ_0		0	0	0		0	0
1	0	$-\lambda_1$		0	0	0		0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
n-1	0	0		$-\lambda_{n-1}$	λ_{n-1}	0		0	0
n	0	0		0	$-\lambda_n$	λ_n		0	0

n+1	0	0		0	0	$-\lambda_{n+1}$		0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
N-1	0	0		0	0	0		$-\lambda_{N-1}$	λ_{N-1}
N	0	0		0	0	0		0	1

Plecând de la ecuțiile viitorului şi folosind elementele din **Q** se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} p_0^{'}(t) &= -\lambda_0 p_0(t) \\ p_n^{'}(t) &= \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) - \lambda_n p_n(t) \\ p_N^{'}(t) &= \lambda_{N-1} p_{N-1}(t) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Procesul de sosire adecvat cererilor de serviciu se caracterizează prin independența față de starea sistemului a ratei de naştere λ_n, ceea ce înseamnă că:

$$\lambda_n = \lambda, \text{ pentru orice } n \in N \tag{3.22}$$

Presupunem că la momentul inițial $t = 0$, *starea* sistemului este $N(0) = n_0 = 0$. Înseamnă că:

$$p_n(0) = \begin{cases} 1, & \text{daca} \quad n = n_0 \\ 0, & \text{daca} \quad n \neq n_0 \end{cases} \tag{3.23}$$

Se poate deduce uşor că distribuția căutată este o **distribuție Poisson**:

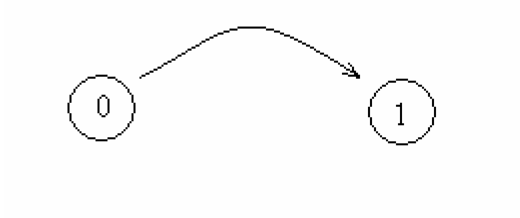
$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \tag{3.24}$$

Ea precizează de altfel probabilitatea condiționată ca n naşteri să apară în intervalul $(0, t)$, dacă starea inițială este caracterizată de o populație nulă, adică $n_0 = 0$.

<u>Aplicația 1</u>

Linia unui abonat telefonic se poate găsi în două stări: liber sau ocupat, notate cu 0, respectiv 1. Ştiind că duratele celor două tipuri de stări urmează distribuții de probabilitate exponențiale de medie $1/\alpha = 5/4$, respectiv $1/\beta = 5$, să se determine probabilitatea de stare $p_0(t)$ şi $p_1(t)$ în funcție de probabilitățile inițiale de stare: $p_0(0) = 0,3$ şi $p_1(0) = 0,7$

Rezolvare:



$$\begin{cases} p_n^{'}(t) = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) - \lambda_n p_n(t) \\ p_1^{'}(t) = \alpha p_0(t) - \beta p_1(t) \end{cases}$$

$$p_n^{'}(t) = -\mu_n p_n(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t)$$

$$p_0^{'}(t) = -\alpha p_0(t) + \beta p_1(t)$$

$\Rightarrow$ sist de ecuații diferențiale a viitorului:

$$\begin{cases} p_0^{'}(t) = -\alpha p_0(t) + \beta p_1(t) \\ p_1^{'}(t) = \alpha p_0(t) - \beta p_1(t) \end{cases}$$

- relația de normare:

$$p_0(t) + p_1(t) = 1$$

$$p_0^{'}(t) = -\alpha p_0(t) + \beta(1 - p_0(t))$$

$$p_0^{'}(t) + (\alpha + \beta) p_0(t) = \beta$$

$$sP_0(s) + (\alpha + \beta) P_0(s) = \beta$$

$$P_0(s) = \frac{\beta}{S + \alpha + \beta} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + S}$$

Cu soluția:

$$p_0(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + Ce^{-(\alpha+\beta)t}$$

$$\alpha + \beta = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{\frac{1}{5}}{1} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$C = 0,3 - \frac{\beta}{\alpha + \beta} = 0,3 - 0,2 = 0,1$$

Cu soluția:

Penru t =0 avem condiția: $p_0(0) = 0.3$

$$0,3 = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + C \Rightarrow C = 0,3 - \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

$$\Rightarrow p_0(t) = 0,2 + 0,1e^{-t}$$
$$p_1^{'}(t) = \alpha p_0(t) - \beta p_1(t)$$
$$p_0(t) = 1 - p_1(t)$$

$$p_1^{'}(t) = \alpha\left(1 - p_1(t)\right) - \beta p_1(t)$$
$$p_1^{'}(t) + \left(\alpha + \beta\right) p_1(t) = \alpha$$
$$p_1(t) = \frac{\alpha}{\beta + \alpha} + Ke^{-(\alpha+\beta)t}$$

pentru t = 0 condiţia iniţială

$$p_1(0) = 0,7$$
$$\Rightarrow p_1(0) = \frac{\alpha}{\beta + \alpha} + K \Rightarrow K = p_1(0) - \frac{\alpha}{\beta + \alpha}$$

$$\frac{\alpha}{\beta + \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = \frac{4}{5} = 0,8$$
$$K = 0,7 - 0,8 = -0,1$$
$$p_1(t) = 0,8 * 0,1e^{-t}$$

Definiţia 1

Traficul este raportul dintre durata medie de serviciu şi durata medie a interapelului, ceea ce înseamnă că e o cantitate fără dimensiuni:

$$A = {(1/\mu)\sec} \Big/ {(1/\lambda)\sec}$$

Unitatea care tinde să se generaliz. este ERLANG-ul.

Definiţia 2

Traficul oferit sau traficul de intrare este nr. mediu de cereri ce se prezintă în sistem, cu rata de apelare λ, în intervalul de apelare egal cu timpul medie de serviciu $1/\mu$.

$$A = \lambda\left(\text{cereri/secunda}\right) \cdot 1/\mu\left(\text{secunde}\right)$$

Dar cererile nu pot exista în afara surselor cele produc. Aceeaşi definiţie poate căpăta forma:

Traficul oferit este nr. mediu de surse simultan ocupate în decursul unui interval cât durata medie de servire $1/\mu$, dacă rata lor de apelare este λ.

$$A = \lambda\left(\text{surse ocupate/secunda}\right) \cdot 1/\mu\left(\text{secunde}\right)$$

Definiția 3

Orice cerere acceptată de sistem are la dispoziție un circuit sau dispozitiv de prelucrare, pe care îl ocupă pe toată durata lui de prezență în sistem, ceea ce înseamnă că:

Traficul scurs (prelucrat) este nr. de resurse simultan ocupate pe durata timpului mediu de serviciu $1/\mu$ pentru prelucrarea cererilor oferite cu rata λ.

$$A = \lambda\left(\text{resurse ocupate/secunda}\right)\cdot 1/\mu\left(\text{secunde}\right)$$

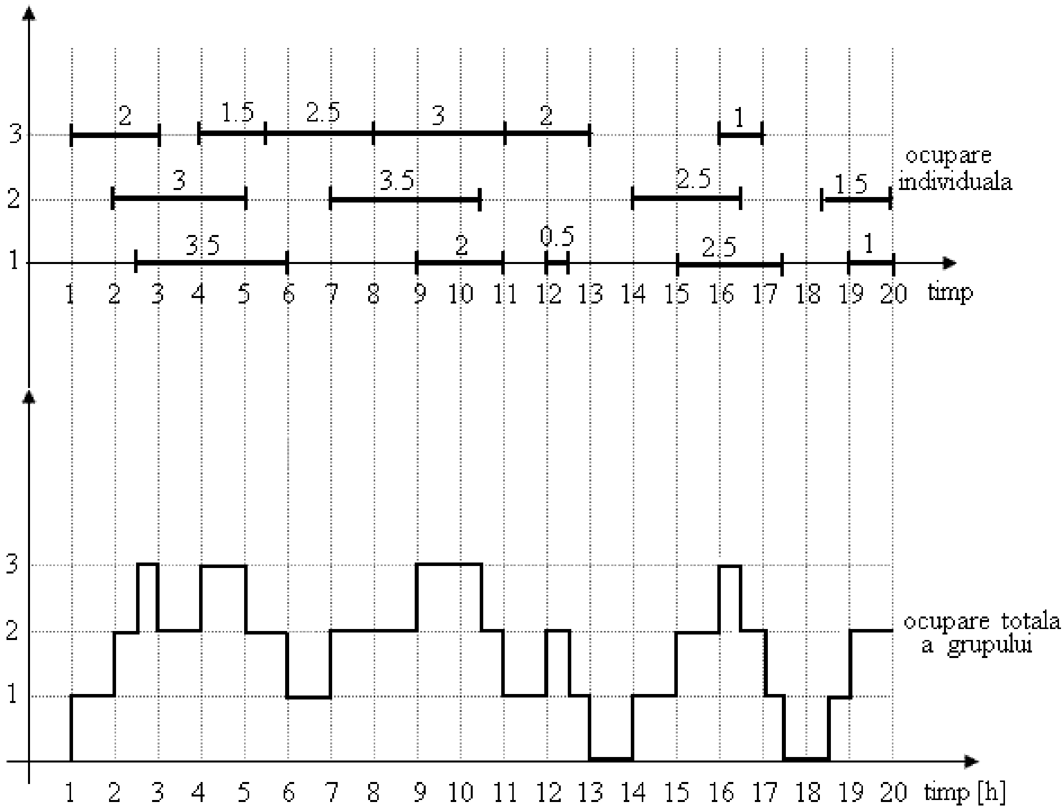
Aplicația 2

În figura de mai jos este prezentată diagrama de ocupare a 3 resurse, funcționând într-un grup comun observate în decurs de 20 ore. Se cere:

a.) Diagrama de ocupare totală a grupului

b.) Durata totală de angajare

c.) Intensitatea traficului scurs



b.) Durata totală de angajare:

$$\sum_{i=1}^{3}\sigma_i = \sigma_1 + \sigma +_2 \sigma_3$$

$\sigma_1 = 3,5+2+0,5+2,5+1 = 9,5ore$

$\sigma_2 = 3+3,5+2,5+1,5 = 10,5ore$

$\sigma_3 = 2+1,5+2,5+3+2+1 = 12ore$

c.) Intensitatea traficului scurs:

$$\frac{As}{T}=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{R} i\sigma(i)=\frac{1}{T}[1\cdot\sigma(1)+2\cdot\sigma(2)+3\cdot\sigma(3)]=$$

$$=\frac{1}{20}[1\cdot 1+2\cdot 0,5+3\cdot 0,5+2\cdot 1+3\cdot 1+2\cdot 1+1+2\cdot 2+3\cdot 1,5+2\cdot 0,5+$$

$$1+2\cdot 0,5+0,5+1+2\cdot 1+3\cdot 0,5+2\cdot 0,5+0,5+0,5+2]=\frac{32ore}{20}=1,6E$$

$$\sum\sigma_i=\sum i\sigma(i)$$

Nr. sursei	1	2	3	Valori medii
Durata totală de angajare σ_i	9,5	10,5	12	Intensitate trafic:1,6
Nr.de angajări n_i	5	4	3	
Rata de angajare individuală λ_i	5/20 = 0,25	4/20 = 0,2	3/20 = 0,15	Rata medie de apelare:0,6
Durata totală de servicii ts_i	9,5/5 = 1,9	10,5/4 = 2,26	12/3 = 4	Durata medie de serviciu:2,66h/apel

$$\lambda_i'=\frac{n_i}{T};\quad ts_i=\frac{\sigma_i}{n_i}$$

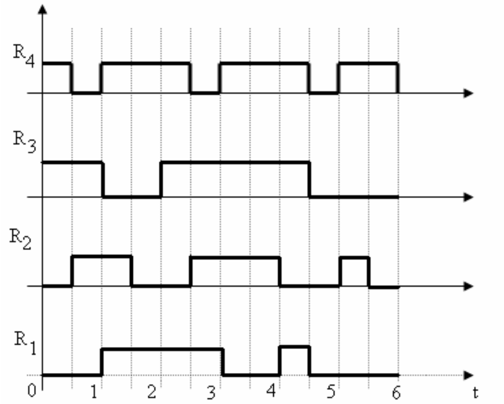
Aplicația 3

În urma observării a 4 resurse pe durata a 6 minute s-au trasat diagramele din figura de mai jos, în care: 1 - ocupat; 0 – starea de neutilizare a fiecărei resurse. . Se cere:

a.) Diagrama de ocupare totală a grupului

b.) Durata totală de angajare

c.) Intensitatea traficului scurs



Stabiliți intensitatea medie a traficului servit de respectivul grup pe parcursul intervalului considerat.

Rezolvare:

i	n_i	σ_i	$\lambda_i\left[\min^{-1}\right]$	τ_i (durata în div de servicii)	$\hat{A}_i$
1	2	2,5	2/6 = 1/3	2,5/2 = 5/4	2,5/6 = 5/12
2	3	3	3/6 =1/2	3/3 = 1	3/6 =1/2
3	2	3,5	2/6 = 1/3	3,5/2 = 7/4	3,5/6 = 7/12
4	4	4,5	4/6 = 2/3	4,5/4 = 9/8	4,5/6 = 9/12 =3/4
Total	11	13,5	11/6	27/22 – durata medie de serviciu	9/4

$$\frac{A_s}{T} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{4} i\sigma(i) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{4}\sigma(i) = \frac{1}{6}(2.5+3+3.5+4.5) = \frac{13.5}{6} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$$

$$\widehat{A} = \sum \widehat{s}_i = \frac{9}{4} = 2.25E$$

i	$\sigma(i)$	$i\sigma(i)$
1	0,5	0,5
2	2	4
3	3	9
4	0	0
Total		**13,5 minute**

Aplicația 4

1. Accesul unui grup de terminale la rețeaua de telecomunicații se face prin intermediul unui mod de comunicație care dispune de o singură linie de date de o capacitate de 10 Mbiți/sec. Dacă traficul oferit de terminale spre a fi transferat în rețea este de:

(i) 600 pachete / sec cu câte 1000 de biți pachetul.

(ii) 8 Mbiți/sec

exprimările în unități Erlang:

$$B = \frac{\lambda\left(mesaje / oră\right) * L(biți)}{D(biți / \sec) * 3600}$$

În cazul nostru:

$$\left(i\right) B = \frac{600\, pachete / \sec * 1000}{10 * 10^5} = \frac{6}{100} = 0,06E$$

$$\left(ii\right) B = \frac{8 * 10^6\, biți / \sec}{10 * 10^6\, biți / \sec} = 0,8E$$

Notă:

Trafic scurs după definiția 3

$$A_s = \sum_{i=1}^{R} \sigma_i = \sum_{i=1}^{R} i\sigma\left(i\right)$$

1. Intensitatea traficului după definiția 4

$$\frac{A_s}{T} = \frac{\sum_{i=1} i\sigma\left(i\right)}{T} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{K} \sigma_i$$

2. Timpul mediu de servicii caracteristic

$$t * s_i = \frac{\sigma_i}{n_i}$$

3. Nr de angajări în unitatea de timp (rate de angajare)

$$\lambda_i^{'} = \frac{n_i}{T}$$