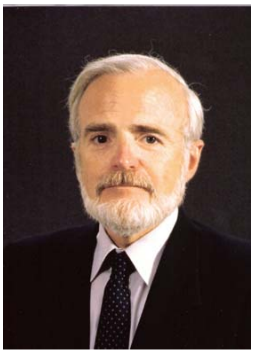


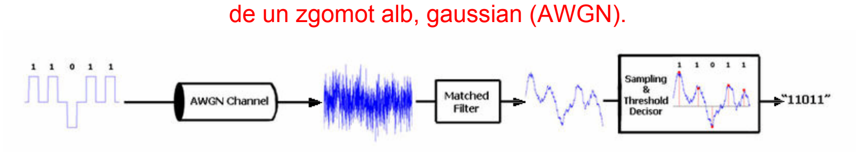
Harry Van Trees

Kristine L. Bell

Steven Kay

DETECȚIA SEMNALELOR DETERMINISTE CUNOSCUTE

Vom aborda problema detecției unui semnal cunoscut.Un exemplu tipic pentru un astfel de caz, este transmisia digitală coerentă, aplicată în telecomunicații. Testul, pe care se bazează detecția, va rezulta sub o formă liniară, cunoscută și sub denumirea de filtru adaptat la forma semnalului, sau, simplu, filtru adaptat. Termenul corespunzător în engleză este cel de matched filter. Efectul unui astfel de filtru este cel de maximizare a SNR. În figură (wikipedia) se sugerează efectul filtrului asupra unui semnal afectat, aditiv, de un zgomot alb, gaussian (AWGN).



Filtrul adaptat la forma semnalului (the matched filter)

Vom începe construcția detectorului de tip filtru adaptat, aplicând abordarea Neyman-Pearson (NP). Și abordarea bayesiană conduce la aceeași formă a detectorului, diferind doar pragurile de comparare și, evident, performanțele statistice. Problema constă în a alege între două ipoteze

$$\mathcal{H}_0 : x[n] = w[n] \qquad ;\ n=0,\ 1,\ ...,\ N\text{-}1$$

$$\mathcal{H}_1 : x[n] = s[n] + w[n];\ n=0,\ 1,\ ...,\ N\text{-}1$$

$$w[n] \sim \mathcal{N}\left(0,\ \sigma^2\right)$$

zgomotul w[n] fiind alb, gaussian, cu secvența de autocorelație de forma

$$r_w[k] = E\{w[n]w[n+k]\} = \sigma^2\delta[k] = (N_0/2)\delta[k]$$

Reamintim că

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

Detectorul NP decide că $\mathcal{H}_1$ este ipoteza adevărată dacă raportul de plauzibilitate depăşeşte pragul testului, γ, adică

$$L(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x};\ \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{x};\ \mathcal{H}_0)} \overset{\mathcal{H}_1}{\overbrace{>}} \gamma$$

Datele **x** fiind gaussiene, e suficient să cunoaştem mediile şi dispersiile lor, în cele două ipoteze

$$\mathcal{H}_0 : E\{x[n]\} = E\{w[n]\} = 0$$

$$\mathcal{H}_1 : E\{x[n]\} = E\{s[n] + w[n]\} = E\{s[n]\} + E\{w[n]\} = s[n]$$

$$\mathcal{H}_0 : Disp\{x[n]\} = Disp\{w[n]\} = \sigma^2$$

$$\mathcal{H}_1 : Disp\{x[n]\} = Disp\{s[n] + w[n]\} = Disp\{w[n]\} = \sigma^2$$

Repartiţiile datelor, **x**, în cele două ipoteze, rezultă că sunt

$$p(\mathbf{x};\ \mathcal{H}_1) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n] - s[n])^2\right\}$$

$$p(\mathbf{x};\ \mathcal{H}_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n])^2\right\}$$

Dacă substituim acest ultim rezultat în raportul de plauzibilitate, condiţia de selectare a ipotezei $\mathcal{H}_1$ devine

$$L(\mathbf{x}) = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{n=0}^{N-1}(x[n] - s[n])^2 - \sum_{n=0}^{N-1}(x[n])^2\right]\right\} \overset{\mathcal{H}_1}{\overbrace{>}} \gamma$$

sau, după logaritmare

$$l(\mathbf{x}) = \ln L(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{n=0}^{N-1}(s[n])^2 - 2\sum_{n=0}^{N-1}x[n]s[n]\right] \overset{\mathcal{H}_1}{\overbrace{>}} \ln\gamma$$

Inegalitatea se pune sub forma

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]s[n] - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(s[n])^2 \overset{\mathcal{H}_1}{\overbrace{>}} \ln\gamma$$

Deoarece s[n] este un semnal cunoscut, ce nu depinde de datele **x**, termenul marcat poate fi încorporat în prag aşa că

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1}x[n]s[n] \overset{\mathcal{H}_1}{\overbrace{>}} \sigma^2\ln\gamma + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}(s[n])^2 = \gamma'$$

sau

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1}x[n]s[n] \overset{\mathcal{H}_1}{\overbrace{>}} \gamma' \qquad (12)$$

Detectorul NP obținut constă dintr-o statistică a testului, T(**x**), ce depinde de realizările datelor, **x**, şi dintr-un prag al testului, γ'. Valoarea pragului trebuie aleasă astfel încât să fie satisfăcută constrângerea impusă de valoarea acceptată pentru probabilitatea alarmei false.

Vom considera un exemplu simplu, în care semnalul cunoscut este o componentă continuă, s[n]=A>0. Substituind în test obținem

$$s[n]=A, \;\Rightarrow\; T(\mathbf{x})=A\sum_{n=0}^{N-1}x[n]$$

Se substituie statistica în testul (12) şi împărțind cu NA>0, ceeace nu schimbă sensul inegalității, obținem

$$T'(\mathbf{x})=\frac{1}{NA}T(\mathbf{x})=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}\frac{1}{NA}\gamma'=\gamma''$$

Observație

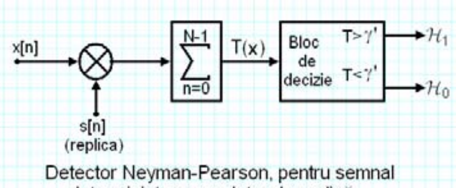
$$\text{Pentru A>0,}\quad \text{decidem } \mathcal{H}_1 \text{ dacă:}\quad \overline{x}>\gamma''>0$$
$$\text{Pentru A<0,}\quad \text{decidem } \mathcal{H}_1 \text{ dacă:}\quad \overline{x}<\gamma''<0$$

***

Detectorul care lucrează conform statististicii ce se utilizează în cazul general,

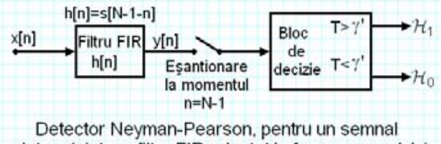
$$T(\mathbf{x})=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]s[n] \qquad (13)$$

se implementează sub forma unui corelator, cunoscut şi sub denumirea de corelator de replică în sensul că el păstrează o copie, o replică, a semnalului s[n] ce se caută (vezi figura).



Detector Neyman-Pearson, pentru semnal determinist, cu corelator de replică

Implementarea detectorului se poate realiza şi cu un filtru FIR, adaptat la forma semnalului s[n] ce se caută (vezi figura).



Detector Neyman-Pearson, pentru un semnal determinist, cu filtru FIR adaptat la forma semnalului

Dacă funcția pondere a filtrului FIR este legată de forma semnalului determinist s[n] prin relația

$$h[n]=s[N-1-n]; \qquad \text{n=0, 1, ..., N-1}$$

răspunsul filtrului FIR, calculat prin convoluție este

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[n-k]x[k] = \sum_{k=0}^{N-1} s[N-1-n-k]x[k]$$

Răspunsul y[n] se eşantionează după recepția celor N eşantioane de date, adică la momentul discret n=N-1, şi se obține chiar expresia statisticii (12)

$$y[N-1] = \sum_{k=0}^{N-1} s[k]x[k] = T(\mathbf{x})$$

***

Vom aborda problema de detecție şi altfel. Vom cere, ca înainte de a lua o decizie, să maximizăm şansele unei detecții corecte, prin mărirea SNR la ieşirea unui filtru FIR, cu funcția pondere h[n]. Vom căuta acea funcție h[n] care maximizează SNR, fiind cunoscute s[n] şi caracteristicile statistice ale zgomotului w[n]. Expresia SNR este

$$\eta = \frac{\left(E\{y[N-1];\ \mathcal{H}_1\}\right)^2}{Disp\{y[N-1];\ \mathcal{H}_0\}} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{N-1} h[N-1-k]E\{s[k]+w[k]\}\right)^2}{E\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1} h[N-1-k]w[k]\right)^2\right\}}$$

$$= \frac{\left(\sum_{k=0}^{N-1} h[N-1-k]s[k]\right)^2}{E\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1} h[N-1-k]w[k]\right)^2\right\}}$$

Introducem următoarele notații vectoriale

$$\mathbf{x} = \left[x[0]\ x[1]\ \ldots\ \mathrm{x[N\text{-}1]}\right]^T$$

$$\mathbf{s} = \left[s[0]\ s[1]\ \ldots\ \mathrm{s[N\text{-}1]}\right]^T; \quad \mathbf{w} = \left[w[0]\ w[1]\ \ldots\ \mathrm{w[N\text{-}1]}\right]^T$$

$$\mathbf{h} = \left[h[\mathrm{N\text{-}1}]\ h[\mathrm{N\text{-}2}]\ \ldots\ \mathrm{h[0]}\right]^T$$ Atentie, secventă inversă!

Prin calcul direct se stabilesc relațiile

$$\mathbf{h}^T\mathbf{s} = \sum_{n=0}^{N-1} h[N-1-k]s[k]; \quad \mathbf{h}^T\mathbf{w} = \sum_{n=0}^{N-1} h[N-1-k]w[k]$$

$$\left(\mathbf{h}^T\mathbf{w}\right)^2 = \mathbf{h}^T\mathbf{w}\left(\mathbf{h}^T\mathbf{w}\right)^T = \mathbf{h}^T\mathbf{w}\mathbf{w}^T\mathbf{h}$$

Media statistică a acestui ultim pătrat se determină cu

$$E\left\{\left(\mathbf{h}^T\mathbf{w}\right)^2\right\} = \mathbf{h}^T E\left\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\right\}\mathbf{h}$$

Zgomotul fiind alb, gaussian, matricea sa de covarianță se reduce la o formă diagonală

$$E\left\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\right\} = \mathbf{C}_w = \sigma^2\mathbf{I}_u$$

Putem rescrie acum expresia raportului semnal/zgomot, SNR

$$\eta = \frac{\left(\mathbf{h}^T\mathbf{s}\right)^2}{\sigma^2\mathbf{h}^T\mathbf{h}}$$

În literatura de specialitate se prezintă inegalitatea Cauchy-Schwarz, pentru funcții

$$\left|\int f(x)g(x)dx\right|^2 \le \int |f(x)|^2 dx \int |g(x)|^2 dx; \text{ egalul are loc dacă, si numai dacă, } g(x) = cf(x)$$

şi pentru vectori

$$\left(\mathbf{x}^T\mathbf{y}\right)^2 \le \left(\mathbf{x}^T\mathbf{x}\right)\left(\mathbf{y}^T\mathbf{y}\right); \text{ egalul are loc dacă, si numai dacă, } \mathbf{y} = c\mathbf{x}$$

***

Aplicând inegalitatea de mai sus pentru vectorii **h** şi **s**, avem

$$\left(\mathbf{h}^T\mathbf{s}\right)^2 \le \left(\mathbf{h}^T\mathbf{h}\right)\left(\mathbf{s}^T\mathbf{s}\right); \text{ egalul are loc dacă, si numai dacă, } \mathbf{h} = c\mathbf{s}$$

inegalitate care, aplicată raportului semnal/zgomot, SNR, conduce la

$$\eta = \frac{\left(\mathbf{h}^T\mathbf{s}\right)^2}{\sigma^2\mathbf{h}^T\mathbf{h}} \le \frac{\left(\mathbf{h}^T\mathbf{h}\right)\left(\mathbf{s}^T\mathbf{s}\right)}{\sigma^2\left(\mathbf{h}^T\mathbf{h}\right)} = \frac{\left(\mathbf{s}^T\mathbf{s}\right)}{\sigma^2}; \text{ egalul are loc dacă, si numai dacă, } \mathbf{h} = c\mathbf{s}$$

În concluzie, pentru un semnal determinist dat, **s**, există un filtru **h**=c**s,** cu c o constantă, în secvență inversă, care maximizează SNR, notat cu η. Ponderile filtrului FIR sunt

$$h[n] = s[N-1-n]; \qquad n=0,\ 1,\ ...,\ N\text{-}1$$

Valoarea maximă a raportului semnal/zgomot este

$$\eta_{\max} = \frac{\left(\mathbf{s}^T\mathbf{s}\right)}{\sigma^2} = \frac{\epsilon}{\sigma^2} = \frac{2\epsilon}{N_0};$$

unde

$$\epsilon = \mathbf{s}^T\mathbf{s} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(s[n]\right)^2$$

este este energia semnalului determinist iar

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$$

este densitatea spectrală de putere a zgomotului alb, gaussian.

În concluzie:

Pentru rezolvarea unei probleme de detecție a unui semnal determinist, complet cunoscut, afectat în mod aditiv de un zgomot alb, gaussian, atât criteriul Neyman-Pearson cât şi criteriul maximizării raportului semnal/zgomot, conduc la aceeaşi soluție, cea a filtrului adaptat la forma semnalului. Deoarece criteriul Neyman-Pearson conduce la un detector optimal, rezultă că şi criteriul maximizării raportului semnal/zgomot conduce la un detector optimal.

***

Filtrul adaptat la forma semnalului maximizează raportul semnal/zgomot chiar şi pentru un zgomot non-gaussian, dar nu mai este optimal, în sensul criteriului NP.

Analiza performanțelor de detecție ale filtrului adaptat la forma semnalului

Ne propunem să determinăm valoarea probabilității de detecție, pentru o valoare impusă a probabilității alarmei false. Aşa cum am arătat, detecția se face comparând statistica T cu un prag

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s[n] \overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \gamma' \qquad (12)$$

Datele **x** fiind gaussiene, T(**x**) are şi ea o repartiție gaussiană. Este deci suficient sa-i determinam mediile şi dispersiile, în ambele ipoteze. Pentru medii avem relațiile

$$E\{T;\ \mathcal{H}_0\} = E\{\mathbf{s}^T\mathbf{x};\ \mathcal{H}_0\} = E\{\mathbf{s}^T\mathbf{w}\} = \mathbf{s}^T E\{\mathbf{w}\} = 0$$

$$E\{T;\ \mathcal{H}_1\} = E\{\mathbf{s}^T\mathbf{x};\ \mathcal{H}_1\} = E\{\mathbf{s}^T(\mathbf{s}+\mathbf{w})\} = \mathbf{s}^T\mathbf{s} + \mathbf{s}^T E\{\mathbf{w}\} = \mathbf{s}^T\mathbf{s} = \epsilon$$

Putem determina acum şi dispersiile

$$Disp\{T;\ \mathcal{H}_0\} = Disp\{\mathbf{s}^T\mathbf{x};\ \mathcal{H}_0\} = Disp\{\mathbf{s}^T\mathbf{w}\} = E\left\{\left(\mathbf{s}^T\mathbf{w}\right)^2\right\}$$

$$= E\{\mathbf{s}^T\mathbf{w}\mathbf{w}^T\mathbf{s}\} = \mathbf{s}^T E\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\}\mathbf{s} = \sigma^2\epsilon$$

$$Disp\{T;\ \mathcal{H}_1\} = Disp\{\mathbf{s}^T\mathbf{x};\ \mathcal{H}_1\} = Disp\{\mathbf{s}^T(\mathbf{s}+\mathbf{w})\}$$

$$= Disp\{\mathbf{s}^T\mathbf{w}\} = \sigma^2\mathbf{s}^T\mathbf{s} = \sigma^2\epsilon$$

În cele două ipoteze, statistica T(**x**) pe baza căreia se iau deciziile, are, în cele două ipoteze, distribuții normale, adică

$$T \sim \begin{cases} \mathcal{N}\left(0,\ \sigma^2\epsilon\right), & \text{în ipoteza } \mathcal{H}_0 \\ \mathcal{N}\left(\epsilon,\ \sigma^2\epsilon\right), & \text{în ipoteza } \mathcal{H}_1 \end{cases}$$

Suntem în cazul în care cele două ipoteze se disting prin mediile repartițpplor. Ca atare

$$P_{FA} = P\{T > \gamma';\ \mathcal{H}_0\} = Q\left(\frac{\gamma'}{\sqrt{\sigma^2\epsilon}}\right)$$

și

$$P_D = P\{T > \gamma';\ \mathcal{H}_1\} = Q\left(\frac{\gamma'-\epsilon}{\sqrt{\sigma^2\epsilon}}\right)$$

Din prima ecuație se determină pragul testului ca fiind

$$\gamma' = \sqrt{\sigma^2\epsilon}\,Q^{-1}(P_{FA})$$

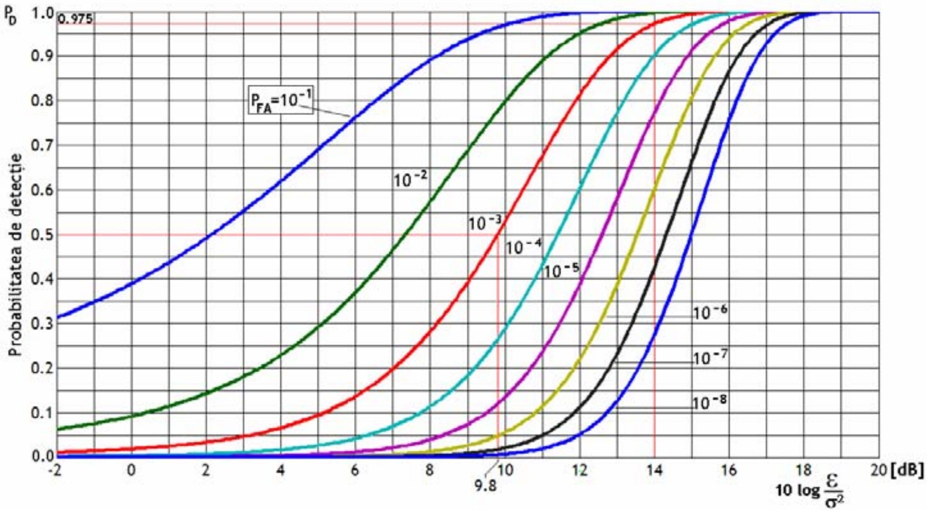
Se substituie expresia pragului în expresia probabilității de detecție și obținem

$$P_D = Q\left(Q^{-1}(P_{FA}) - \sqrt{\frac{\epsilon}{\sigma^2}}\right)$$

Dacă semalul de detectat este o componentă continuă, s[n]=A, energia se calculează cu

$$\epsilon = NA^2$$

În figură se prezintă curbele de performanță ale detectorului NP, cu filtru adaptat la forma semnalului.



Utilizarea filtrului adaptat ne conduce la conceptul de "câștig de prelucrare". El poate fi privit ca descriind avantajul obținut dacă deciziile se iau pe baza unei statistici, față de cazul în care deciziile se iau direct, pe baza datelor primare. Câștigul de prelucrare se cuantifică prin creșterea SNR, obținută prin prelucrare. La intrarea filtrului adaptat, SNR este

$$\eta_{in} = \frac{A^2}{\sigma^2}$$

La ieșirea filtrului adaptat, ca urmare a prelucrării a N eșantioane, SNR devine

$$\eta_{out} = \eta_{\max} = \frac{NA^2}{\sigma^2}$$

Măsurat în dB, câștigul de prelucrare (Processing Gain) este

$$PG = 10\log\frac{\eta_{in}}{\eta_{out}} = 10\log N$$

Prelucrând nu unul, ci 4 eșantioane, obținem un câștig de prelucrare de 4dB.

Reamintim că, în prezentarea filtrului adaptat, am presupus că zgomotul este alb, gaussian. Se poate pune problema conceperii unui filtru adaptat pentru zgomot gaussian colorat, caracterizat de o matrice de covarianță **C**.

Filtrul adaptat generalizat (rezumat)

Dacă eșantioanele de zgomot sunt corelate, atunci

$$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0},\ \mathbf{C})$$

Elementele matricei de covarianță au expresiile

$$[\mathbf{C}]_{mn} = E\{w[m]w[n]\} = r_w[m-n]$$

Drept urmare a formei funcției de corelație a zgomotului, matricea de covarianță are o formă Toeplitz, simetrică.

Vom presupune că urmărim să detectăm semnalul cunoscut, **s**, afectat, aditiv, de zgomotul colorat, **w**. Datele recepționate au, în cele două ipoteze, repartițiile

$$\mathbf{x} \sim \begin{cases} \mathcal{N}(\mathbf{0},\ \mathbf{C}), & \text{în ipoteza } \mathcal{H}_0 \\ \mathcal{N}(\mathbf{s},\ \mathbf{C}), & \text{în ipoteza } \mathcal{H}_1 \end{cases}$$

Densitățile de repartiție se determină cu relațiile

$$p(\mathbf{x};\ \mathcal{H}_1) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\mathbf{C}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{s})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{s})\right\}$$

$$p(\mathbf{x};\ \mathcal{H}_0) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{|\mathbf{C}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}\right\};\ \text{unde} |\mathbf{C}| \text{ este determinantul}$$

Pentru a lua o decizie, vom construi criteriul raportului de plauzibilitate logaritmică

$$l(\mathbf{x}) = \ln L(\mathbf{x}) = \ln \frac{p(\mathbf{x};\ \mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{x};\ \mathcal{H}_0)} \overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \ln\gamma$$

Prin calcul direct se arată că raportul de plauzibilitate poate fi pus în forma

$$l(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} \overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \ln\gamma$$

Termenul marcat nu depinde de date, așa că poate fi inclus în prag

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} \overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless} \ln\gamma + \frac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} = \gamma' \qquad (14)$$

Detectorul definit prin relația (14), se numește corelator de replică generalizat,sau filtru adaptat (la forma semnalului), generalizat.

Dacă transformăm mai întâi semnalul cunoscut, **s,** prin înmulțire cu inversa matricei de covarianță

$$\mathbf{s}' = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}$$

atunci corelatorul de replică generalizat poate fi considerat ca fiind un corelator de replică obișnuit, dar care are ca referință semnalul “distorsionat”, **s’**

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} = \mathbf{x}^T\mathbf{s}'$$

Pentru exemplificare vom considera că eșantioanele de zgomot deși nu sunt corelate, au dispersii diferite între ele. Matricea de covarianță și inversa ei sunt

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\sigma_0^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_1^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{N-1}^2\end{bmatrix}=diag\left\{\sigma_0^2,\sigma_1^2,\ldots,\sigma_{N-1}^2\right\};\quad \mathbf{C}^{-1}=diag\left\{\sigma_0^{-2},\sigma_1^{-2},\ldots,\sigma_{N-1}^{-2}\right\}$$

Substituim în forma (14) a detectorului și, efectuând calculele obținem

$$T(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}=\begin{bmatrix}x[0] & x[1] & \ldots & x[N-1]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_0^{-2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_1^{-2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{N-1}^{-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s[0]\\ s[1]\\ \vdots\\ s[N-1]\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{x[n]s[n]}{\sigma_n^2}\underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}}\gamma'$$

***

Reamintim că se poate aplica tehnica de “albire” a datelor. Avem

$$\mathbf{C}^{-1}=\mathbf{D}^T\mathbf{D}$$

Pentru exemplul anterior avem

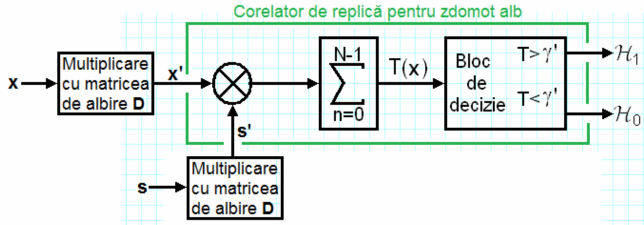
$$\mathbf{C}^{-1}=\begin{bmatrix}\sigma_0^{-2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_1^{-2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{N-1}^{-2}\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}\sigma_0^{-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_1^{-1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{N-1}^{-1}\end{bmatrix}}^{\mathbf{D}^T}\overbrace{\begin{bmatrix}\sigma_0^{-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_1^{-1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{N-1}^{-1}\end{bmatrix}}^{\mathbf{D}}$$

Statistica testului se poate pune și sub forma

$$T(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}=\mathbf{x}^T\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{s}=(\mathbf{D}\mathbf{x})^T(\mathbf{D}\mathbf{s})=\mathbf{x}'\mathbf{s}'\underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}}\gamma'$$

$$\mathbf{x}'=\mathbf{D}\mathbf{x}\quad \text{si}\quad \mathbf{s}'=\mathbf{D}\mathbf{s}$$

Reamintim că matricea **D** se numește matrice de albire. Datele se decorelează prin înmultirea cu matricea de albire, dar și replica memorată a semnalului căutat trebuie înmulțită cu **D.** În rest avem de-a face cu un corelator de replică obișnuit, sau cu un filtru FIR adaptat obișnuit



Corelator de replică generalizat

Performanțele statistice ale filtrului adaptat generalizat

Se arată că statistica (14)

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \gamma'$$

are, în cele două ipoteze, repartițiile

$$T \sim \begin{cases} \mathcal{N}\left(0,\ \mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}\right), & \text{în ipoteza } \mathcal{H}_0 \\ \mathcal{N}\left(\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s},\ \mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}\right), & \text{în ipoteza } \mathcal{H}_1 \end{cases}$$

Cele două repartiții diferă prin medie, așa că vom calcula probabilitatea de detecție servindu-ne de relația stabilită anterior

$$P_D = Q\left(Q^{-1}(P_{FA}) - \sqrt{d^2}\right) \qquad (15)$$

în care coeficientul de deflexie are epresia

$$d^2 = \frac{(\mu_1 - \mu_0)^2}{\sigma^2}$$

Substituind găsim

$$d^2 = \mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}$$

și

$$P_D = Q\left(Q^{-1}(P_{FA}) - \sqrt{\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}}\right)$$

În cazul în care zgomotul este alb, probabilitatea de detecție depinde de raportul dintre energia semnalului util și puterea zgomotului, dar nu și de forma semnalului. În cazul zgomotului colorat, coeficientul de deflexie depinde de forma semnalului. Pentru a obține o probabilitate de detecție mare, am putea maximiza d, fără a crește energia semnalului cu care se face transmisia, doar alegând o formă adecvată. Este necesar să maximizăm expresia

$$d^2 = \mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}$$

cu constrângerea

$$\mathbf{s}^T\mathbf{s} = \epsilon$$

Se costruiește lagrangeanul

$$F = \mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} + \lambda\left(\epsilon - \mathbf{s}^T\mathbf{s}\right)$$

Reamintim regulile de derivare

$$\frac{\partial \mathbf{b}^T\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{b}; \qquad \frac{\partial \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \text{dacă: } \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$$

Cu acestea

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}}{\partial \mathbf{s}} - \lambda\frac{\partial \mathbf{s}^T\mathbf{s}}{\partial \mathbf{s}} = 2\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} - 2\lambda\mathbf{s} = 0$$

sau, în final

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} = \lambda\mathbf{s}$$

ceeace înseamnă că **s** este un vector propriu al inversei matricei de covarianță iar λ este o valoare proprie atașată acelui vector propriu. Din relația de constrângere rezultă

$$\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} = \lambda\mathbf{s}^T\mathbf{s} = \lambda\epsilon$$

Membrul stâng trebuie maximizat; energia fiind constantă, maximul se obține pentru valoarea proprie, λ, maximă. Ne putem referi la matricea de covarianță, nu la inversa ei. În acel caz se arată că va trebui să alegem valoarea proprie, minimă, $\mu=1/\lambda$.

Atragem atenția că vectorii proprii se determină cu norma unitară, motiv pentru care trebuie ponderată cu energia admisă pentru semnalul de transmisie.

Pentru exemplificare vom considera că eșantioanele de zgomot sunt corelate, având matricea de covarianță

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

limitată la dimensiunile 2x2, deoarece la recepție se lucrează doar pe două eșantioane de date

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] & x[1] \end{bmatrix}$$

Se determină valorile proprii ale matricei de covarianță cu ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} 1-\mu & \rho \\ \rho & 1-\mu \end{vmatrix} = (1-\mu)^2 - \rho^2 = 0; \quad \mu_1 = 1+\rho \quad \mu_2 = 1-\rho$$

Se determină cei doi vectori proprii de normă unitară cu relațiile

$$\begin{bmatrix} 1-\mu_i & \rho \\ \rho & 1-\mu_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_{i1}^2 + v_{i2}^2 = 1; \quad i = 1,\ 2$$

Vectorii proprii și valorile proprii aferente sunt

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad \mu_1 = 1+\rho \quad \text{si} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad \mu_2 = 1-\rho$$

Vom presupune că avem $\rho>0$, (dar se poate considera și cazul opus). Valoarea proprie minimă și vectorul propriu corespunzător, precum și cele două eșantioane cu care se recomandă să efectuăm transmisiile sunt, în acest caz

$$\text{Dacă } \rho > 0 \Rightarrow \mu_{\min} = \mu_2 = 1-\rho \Rightarrow \mathbf{s} = \sqrt{\epsilon}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Cele două esantioane ale semnalului sunt $s[0] = \sqrt{\epsilon/2}; \quad s[1] = -\sqrt{\epsilon/2};$

Statistica testului care maximizează probabilitatea de detecție devine

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} = \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] & x[1] \end{bmatrix}\frac{1}{\mu_{\min}}\sqrt{\epsilon}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\rho}\sqrt{\epsilon/2}\,(x[0]-x[1])$$

Decizia se va lua comparând o diferență ponderată a celor două eșantioane de date cu un prag. Din cauza corelării pozitive a eșantioanelor de zgomot, ele vor avea, statistic, aceleași semn și valori apropiate. În consecință, efectul zgomotului asupra statisticii T se reduce, nu însă și efectul semnaluilui util, după cum rezultă din diferența

$$x[0]-x[1]=\left(s[0]+w[0]\right)-\left(s[1]+w[1]\right)=2\sqrt{\epsilon/2}+\left(w[0]-w[1]\right)$$

Cu cele stabilite, se poate calcula coeficientul de deflexie. Deoarece $\lambda=1/\mu$ deflexia devine

$$d^2=\mathbf{s}^T\underbrace{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}}_{\lambda_{\max}\mathbf{s}}=\frac{1}{\underbrace{1-\rho}_{\mu_{\min}}}\epsilon;$$

valoare ce trebuie utilizată în relația (15) pentru calculul probabilității de detecție, la o valoare impusă a probabilității alarmei false.

Este de remarcat că

$$\text{pentru}\ \ \rho\to 1,\ \ d^2\to\infty$$

și, în consecință

$$P_D\to 1$$

Explicația este simplă. Cu cât corelarea eșantioanelor succesive de zgomot este mai apropiată de 1, cu atât mai mult scade, statistic, diferența lor, ceece duce la creșterea performanțelor de detecție