Detectarea schimbării dispersiei

Distincția între două ipoteze poate fi dată de schimbarea dispersiei unei statistici gaussiene. Considerăm că datele gaussiene x[n] sunt statistic independente și identic distribuite (IID). Repartițiile datelor, în cele două ipoteze, sunt

$$\mathcal{H}_0 : \ x[n] \sim \mathcal{N}\left(0,\ \sigma_0^2\right); \ \ n = 0,\ 1, \ldots, \text{N-1}$$

$$\mathcal{H}_1 : \ x[n] \sim \mathcal{N}\left(0,\ \sigma_1^2\right); \ \ n = 0,\ 1, \ldots, \text{N-1} \quad \sigma_1^2 > \sigma_0^2$$

Testul NP decide că ipoteza adevărată este H_1, dacă raportul de plauzibilitate depășește pragul testului, γ

$$L(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x};\mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{x};\mathcal{H}_0)} = \frac{\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma_1^2\right)^{N/2}} \exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]\right)^2\right\}}{\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma_0^2\right)^{N/2}} \exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]\right)^2\right\}} > \gamma$$

Efectuăm calculele și obținem

$$\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)^{\frac{N}{2}} exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]\right)^2\right\} > \gamma$$

După logaritmare se determină condiția de alegere a ipotezei H_1 ca fiind

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]\right)^2 > \frac{(2/N)\ln\gamma + \ln\left(\sigma_1^2/\sigma_0^2\right)}{\left(1/\sigma_0^2\right)-\left(1/\sigma_1^2\right)} = \gamma' > 0$$

Statistica testului pentru detectarea schimbării dispersiei este deci estimatorul acesteia

$$T(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n])^2$$

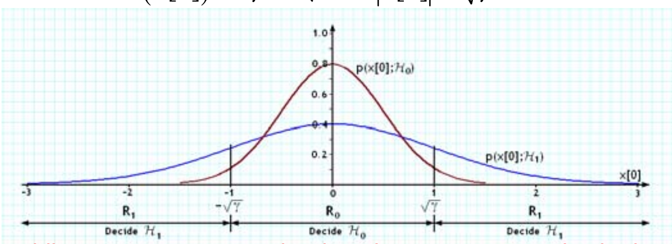
În mod evident, pentru statistica testului se poate lua estimatorul MVU al dispersiei

$$T(\mathbf{x}) = \frac{1}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n])^2$$

Pentru N suficient de mare, cele două statistici sunt, practic, identice.

Pentru N=1, testul decide că H_1 este ipoteza adevărată, dacă

$$(x[0])^2 > \gamma' \quad \rightleftarrows \quad |x[0]| > \sqrt{\gamma'}$$



Cele două repartiții, corespunzătoare celor două ipoteze, precum și cele două regiuni de decizie sunt arătate în figură. Regiunile de decizie au formele

$$\text{Decide } \mathcal{H}_1 \text{ dacă : } \quad x[0] \in \left(-\infty,\ -\sqrt{\gamma'}\right) \cup \left(\sqrt{\gamma'},\ \infty\right) \equiv \mathbb{R}_1$$

$$\text{Decide } \mathcal{H}_0 \text{ dacă : } \quad x[0] \in \left(-\sqrt{\gamma'},\ \sqrt{\gamma'}\right) \equiv \mathbb{R}_0$$

***

Acest comportament este determinat de existența unei statistici suficiente pentru parametrul în cauză. Remarcăm că, atât în cazul detectării unui nivel continuu (din zgomot) cât și în cazul detectării schimbării dispersiei, trebuie să decidem între două ipoteze ale căror densități de probabilitate au anumiți parametri de valori diferite, în cele două ipoteze. Pentru luarea deciziei, se estimează parametrul care se modifică și se compară valoarea estimată cu un prag.

În cazul general, se observă datele **x** care au o densitate de probabilitate parametrizată de θ, p(**x**; θ). Trebuie să efectuăm un test pentru parametrul θ, test descris prin

$$\mathcal{H}_0 :\ \theta = \theta_0$$

$$\mathcal{H}_1 :\ \theta = \theta_1$$

Dacă există o statistică suficientă pentru parametrul θ, T(**x**), conform teoremei de factorizare Neyman-Fisher, densitatea de probabilitate a datelor se poate pune sub forma

$$p(\mathbf{x};\ \theta) = g\left(T(\mathbf{x});\ \theta\right) h(\mathbf{x})$$

Aplicând testul NP, vom decide că H_1 este ipoteza adevărată, dacă

$$L(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x};\ \theta_1)}{p(\mathbf{x};\ \theta_0)} = \frac{g\left(T(\mathbf{x});\ \theta_1\right)}{g\left(T(\mathbf{x});\ \theta_0\right)} > \gamma$$

Menționăm că factorul h(**x**) s-a simpificat. Datele **x** sunt aceleași dar nu știm din care repartiție provin. Inlocuim aceleși date în ambele modele de repartiție și vedem în care ele “se potrivesc mai bine”.

Dacă parametrul θ este o medie, atunci aplicând teorema de factorizare avem

$$p(\mathbf{x};\ \theta) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-\theta\right)^2\right\}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]\right)^2\right\}}_{h(\mathbf{x})} \underbrace{\exp\left\{\frac{\theta N}{\sigma^2}\left(\overbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]}^{T(\mathbf{x})}\right)-\frac{\theta^2 N}{2\sigma^2}\right\}}_{g(T(\mathbf{x});\ \theta)}$$

Dacă parametrul θ este o dispersie, aplicând aceeași teoremă, rezultă

$$p(\mathbf{x};\ \theta) = \underbrace{\frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{N}{2\theta}\left(\overbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]\right)^2}^{T(\mathbf{x})}\right)\right\}}_{g(T(\mathbf{x});\ \theta)} \cdot \underbrace{1}_{h(\mathbf{x})}$$

OBSERVATIE IMPORTANTĂ

Dacă $T(\mathbf{x})$ este un estimator nedeplasat al parametrului θ ce distinge între două ipoteze, atunci detectorul NP va fi implementat ca un estimator al parametrului.

Vom aborda un exemplu în care trebuie să detectăm prezența unei componente continue, A, dintr-un zgomot, w[n], care **nu este gaussian**. Datele, în cele două ipoteze, sunt

$$\mathcal{H}_0:\ x[n] = w[n]; \qquad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ \text{N-1}$$

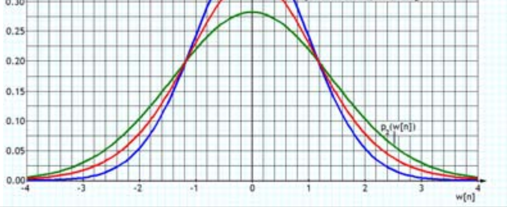
$$\mathcal{H}_1:\ x[n] = A + w[n]; \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ \text{N-1}$$

Eșantioanele de zgomot, w[n], sunt statistic independente și identic distribuite (IID), dar nu sunt gausiene. Fiind eșantioane IID putem scrie, pentru cele două ipoteze, relațiile

$$p(\mathbf{x};\mathcal{H}_0) = \prod_{n=0}^{N-1} p(x[n]) = \prod_{n=0}^{N-1} p(w[n])$$

$$p(\mathbf{x};\mathcal{H}_1) = \prod_{n=0}^{N-1} p(x[n]-A) = \prod_{n=0}^{N-1} p(w[n])$$

Pentru precizarea ideilor, vom considera că zgomotul este o mixtură (un amestec) de de două zgomote gaussiene, unul cu dispersia 1, iar celălalt cu dispersia 2, contribuția fiecărei componente fiind de 0.5, așa cum se arată în figură



În cazul considerat, expresia densității de probabilitate a zgomotului non-gaussian este

$$p(w[n]) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(w[n])^2}{2}\right\}}_{p_1(w[n])} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left\{-\frac{(w[n])^2}{4}\right\}}_{p_2(w[n])}$$

Detctorul NP va decide că H_1 este ipoteza adevărată, dacă raportul de plauzibilitate depășește pragul γ

$$L(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x};\mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{x};\mathcal{H}_0)} = \frac{\prod_{n=0}^{N-1} p(x[n]-A)}{\prod_{n=0}^{N-1} p(x[n])} > \gamma$$

Substituind expresia densității de probabilitate în raportul de plauzibilitate, obținem

$$\frac{\prod_{n=0}^{N-1}\left[\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(w[n]-A)^2}{2}\right\}}_{p_1(w[n])} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left\{-\frac{(w[n]-A)^2}{4}\right\}}_{p_2(w[n])}\right]}{\prod_{n=0}^{N-1}\left[\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(w[n])^2}{2}\right\}}_{p_1(w[n])} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left\{-\frac{(w[n])^2}{4}\right\}}_{p_2(w[n])}\right]} > \gamma$$

Analiza acestei ultime relații pentru raportul de plauzibilitate ne arată că nu putem face vre-o simplificare notabilă, și nici nu observăm existența unei statistici suficiente. Problema nu poate fi deci "redusă"; trebuie să substituim valorile măsurate pentru datele **x** în expresie, să efectuăm calculele și să comparăm rezultatul cu valoarea pragului γ.

***

Caracteristicile de operare ale unui receptor (ROC)

Performanțele unui detector de tip Neyman-Pearson (NP) pot fi redate prin grafice care dau dependența dintre probabilitatea deciziei corecte (puterea testului) și probabilitatea alarmei false (semnificația testului). Aceasta din urmă, ca valoare impusă, se reprezintă pe axa orizontală. Reluând rezultate anterioare, pentru detecția unei componente continue, afectată de un zgomot alb, gaussian, dacă avem o secvență de N date, avem

$$P_{FA} = Q\left(\frac{\gamma'}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right) = \alpha$$

$$P_D = Q\left(\frac{\gamma' - A}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right) = Q\left(Q^{-1}(P_{FA}) - \sqrt{d^2}\right); \quad d^2 = \frac{NA^2}{\sigma^2}$$

Relația se reprezintă grafic în figura următoare, pentru o valoare dată a raportului semnal/zgomot, SNR (sau ENR, dacă preferați) și constituie ROC (Receiver Operating Characteristic)

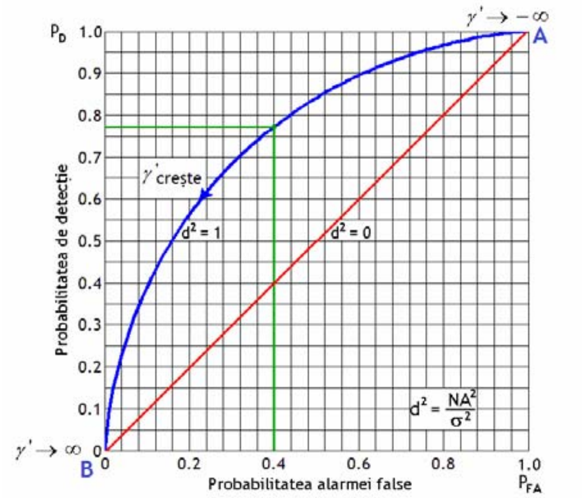
Dacă punem pragul la minus infinit, se detectează toate țintele, dar și toate alarele false

$$\text{Dacă } \gamma' \to -\infty, \text{ atunci } P_D = 1 \text{ si } P_{FA} = 1 \text{ (punctul A pe figură)}$$

Punând pragul la plus infinit, na apare nici o alarmă falsă, dar nici nu se detectează ținte

$$\text{Dacă } \gamma' \to +\infty, \text{ atunci } P_D = 0 \text{ si } P_{FA} = 0 \text{ (punctul B pe figură)}$$

Curba este trasată pentru d=1. Dacă probadilitatea alarmei false este 0.4, rezultă o probabilitate de detecție de 0.78.



Plasarea ROC deasupra bisectoarei este urmare a faptului că recurgem la un detector, adică

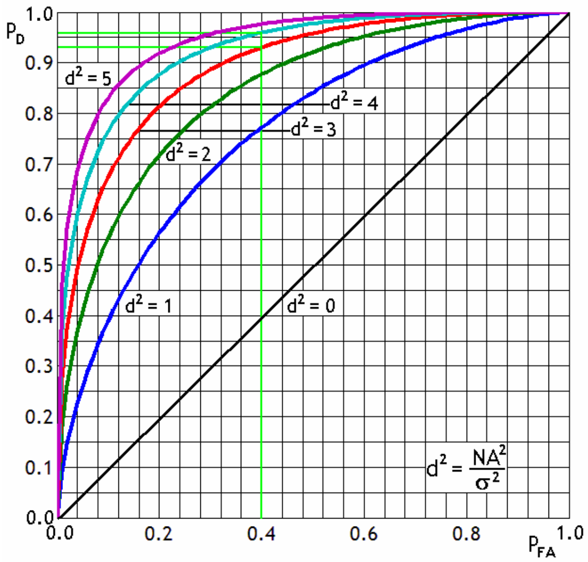
$$P_D > P_{FA}$$

Bisectoarea constituie ROC pentru un receptor care ignoră complet datele și ia decizii în mod complet aleator, "dând cu banul". Pentru un astfel de receptor am avea

$$\left.\begin{aligned} P_{FA} &= P\{"cap";\ \mathcal{H}_0\} = P\{"cap"\} = p \\ P_D &= P\{"cap";\ \mathcal{H}_1\} = P\{"cap"\} = p \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_{FA} = P_D$$

deoarece se ignoră complet condiționarea adusă de datele măsurate. Se ajunge la egalitatea celor două probabilități, deci la o curbă ROC identică cu bisectoarea AB

În figură se arată o familie de caracteristici de operare (ROC), pentru mai multe valori ale coeficientului de deflexie, care este de fapt echivalent raportului semnal pe zgomot, SNR. La aceeași valoare admisă pentru probabilitatea alarmei false, odată cu creștere valorii pentru d, crește și probabilitatea de detecție corectă.



Probabilitatea minimă de eroare. Abordarea bayesiană

În unele cazuri putem aloca probabilități apriorice ipotezelor. Ne exprimăm astfel o încredere “ante-factum” în plauzibilitatea ipotezelor. Acesta e, spre exemplu, cazul transmisiilor binare digitale în care cele două simboluri transmise, 0 sau1,apar cu probabilități egale cu 0.5. Celor două ipoteze

$$\mathcal{H}_0: \text{ a fost transmis simbolul "0"}$$

$$\mathcal{H}_1: \text{ a fost transmis simbolul "1"}$$

le alocăm probabilități apriorice egale

$$P\{\mathcal{H}_0\} = P\{\mathcal{H}_1\} = 1/2$$

Modalitatea de abordare în care asociem ipotezelor implicate în problema de detecție probabilități apriorice egale, se numește abordarea bayesiană. În această abordare se poate defini o probabilitate medie de erore, fără a ține seama de natura erorii

$$P_e = P\{\text{decide } \mathcal{H}_0, \text{ când } \mathcal{H}_1 \text{ este adevărată}\} + P\{\text{decide } \mathcal{H}_1, \text{ când } \mathcal{H}_0 \text{ este adevărată}\}$$

unde $P\{\mathcal{H}_i|\mathcal{H}_j\}$este o probabilitatecondiționată de a decide $\mathcal{H}_i$ atunci când ipoteza adevărată este $\mathcal{H}_j$. Probabilitatea medie de erore se rescrie, sub forma

$$P_e = P\{\mathcal{H}_0|\mathcal{H}_1\}P\{\mathcal{H}_1\} + P\{\mathcal{H}_1|\mathcal{H}_0\}P\{\mathcal{H}_0\}$$

$$P\{\mathcal{H}_i|\mathcal{H}_j\} = P\{\text{decide } \mathcal{H}_i, \textit{conditionată} \text{ de faptul că } \mathcal{H}_j \text{ este adevărată}\}$$

Vom face distincție între $P\{\mathcal{H}_i;\mathcal{H}_j\}$, probabilitatea de a decide $\mathcal{H}_i$ când $\mathcal{H}_j$ este adevărată, fără însă a-i aloca oprobabilitate apriorică, și probabilitatea condiționată $P\{\mathcal{H}_i|\mathcal{H}_j\}$.

Un detector care decide că ipoteza $\mathcal{H}_1$ dacă

$$\text{Se decide } \mathcal{H}_1 \text{ dacă: } \frac{p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_1\}}{p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_0\}} > \frac{P\{\mathcal{H}_0\}}{P\{\mathcal{H}_1\}} = \gamma \qquad (1)$$

minimizează probabilitate medie de eroare, P_e. Raportul de plauzibilitate condiționată, se compară cu un prag γ fix, ce rezultă din raportul probabilităților apriorice ale ipotezelor, luate în succesiune inversată. Se practică și notația

$$\frac{p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_1\}}{p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_0\}} \overset{\mathcal{H}_1}{>} \frac{P\{\mathcal{H}_0\}}{P\{\mathcal{H}_1\}} = \gamma$$

sau una mai pretențioasă, ce indică modul în care se decid ambele ipoteze

$$\frac{p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_1\}}{p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_0\}} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \frac{P\{\mathcal{H}_0\}}{P\{\mathcal{H}_1\}} = \gamma$$

Dacă, așa ca în transmisiile binare, cele două probabilitați apriorice sunt egale, adică

$$P\{\mathcal{H}_0\} = P\{\mathcal{H}_1\} = 1/2$$

pragul testului bayesian de ipoteze este egal cu unu și deci decizia se ia conform cu

$$p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_1\} \overset{\mathcal{H}_1}{>} p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_0\}; \quad \gamma = 1 \qquad (2)$$

Datele **x** fiind recepționate, deci fixate, expresiile

$$p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_1\} \text{ si } p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_0\}$$

sunt, de fapt, plauzibilități condiționate. Din regula de decizie se vede că decizia se ia în favoarea ipotezei cu probabilitatea condiționată maximă.

Detectorul bayesian, pentru cazul probabilităților apriorice egale, se numește detector de plauzibilitate (condiționată) maximă. Detectorul se notează cu acronimul ML (Maximum Likelihood Detector).

Vom exemplifica cu un detector de probabilitate minimă de eroare, pentru detecția unui nivel continuu, A>0, dintrun zgomot alb, gaussian. Problema de detecție este

$$\mathcal{H}_0 : x[n] = w[n]; \qquad n = 0, 1, \dots, \text{N-1}$$
$$\mathcal{H}_1 : x[n] = A + w[n]; \quad n = 0, 1, \dots, \text{N-1}; \quad \text{A>0}$$
$$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_u\right)$$

O problemă de acest fel apare în transmisiile OOK, când semnalele utilizate sunt

$$s_0[n] = 0; \quad s_1[n] = A$$

Cum probabilitățile apriorice sunt egale, receptorul (detectorul) bayesian ce minimizează probabilitate (medie) de eroare decide conform regulii

$$\frac{\dfrac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-A)^2\right\}}{\dfrac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n])^2\right\}} \overset{\mathcal{H}_1}{>} \gamma = 1$$

După simplificare și logaritmare rezultă

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2A\sum_{n=0}^{N-1}x[n] + NA\right) > 0$$

În final, detectorul bayesian ce minimizează, în acest caz, probabilitatea de eroare este

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n] \overset{\mathcal{H}_1}{>} \frac{A}{2}$$

Pentru a determina valoarea erorii medii minime, avem în vedere că media eșantion este repartizată, în cele două ipoteze, conform cu

$$\bar{x} \sim \begin{cases} \mathcal{N}\left(0,\ \sigma^2/N\right) & \textit{conditionată} \text{ de ipoteza } \mathcal{H}_0 \\ \mathcal{N}\left(A,\ \sigma^2/N\right) & \textit{conditionată} \text{ de ipoteza } \mathcal{H}_1 \end{cases}$$

Se aplică regulile de calcul stabilite până acum și obținem

$$\begin{aligned} P_e &= P\{\mathcal{H}_0|\mathcal{H}_1\}\cdot 1/2 + P\{\mathcal{H}_1|\mathcal{H}_0\}\cdot 1/2 \\ &= \Bigg[\underbrace{P\Big\{\underbrace{\bar{x} < A/2}_{\mathcal{H}_0}\Big|\mathcal{H}_1\Big\}}_{\updownarrow} + P\Big\{\underbrace{\bar{x} > A/2}_{\mathcal{H}_1}\Big|\mathcal{H}_0\Big\}\Bigg]\cdot\frac{1}{2} \\ &= \Bigg[\Bigg(\overbrace{1 - P\{\bar{x} < A/2|\mathcal{H}_1\}}^{\updownarrow}\Bigg) + P\{\bar{x} > A/2|\mathcal{H}_0\}\Bigg]\cdot\frac{1}{2} \\ &= \left[1 - Q\left(\frac{(A/2) - A}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right) + Q\left(\frac{(A/2) - 0}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right)\right]\cdot\frac{1}{2} \\ &= \left\{1 - \left[1 - Q\left(\frac{A/2}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right)\right] + Q\left(\frac{A/2}{\sqrt{\sigma^2/N}}\right)\right\}\cdot\frac{1}{2} \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{1}{4}\frac{NA^2}{\sigma^2}}\right);\quad A > 0 \end{aligned}$$

În concluzie, probabilitatea de eroare minimă are expresia

$$P_e = Q\left(\sqrt{d^2/4}\right);\quad d^2 = \frac{NA^2}{\sigma^2}$$

și nu mai depinde de nimic altceva, decât de coeficientul de deflexie (adică de SNR).

***

O altă formă a detectorului bayesian ce minimizează probabilitatea (medie) de eroare se poate deduce din regula (1), rescrisă sub forma

$$p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_1\}P\{\mathcal{H}_1\} \overset{\mathcal{H}_1}{>} p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_0\}P\{\mathcal{H}_0\} \qquad (3)$$

Reamintim formula lui Bayes

$$P\{\mathcal{H}_i|\mathbf{x}\} = \frac{p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_i\}P\{\mathcal{H}_i\}}{p(\mathbf{x})};\quad i = 0,\ 1$$

care leagă probabilitatea datelor condiționate de ipoteză, P{**x**l$\mathcal{H}$}, de probabilitatea ipotezei condiționată de date, P{$\mathcal{H}$l**x**}, numită și probabilitate aposteriori. În formula lui Bayes cu p(**x**) s-a notat expresia

$$p(\mathbf{x}) = p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_0\}P\{\mathcal{H}_0\} + p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_1\}P\{\mathcal{H}_1\}$$

Regula de decizie (3) devine, după aplicarea formulei lui Bayes

$$P\{\mathcal{H}_1|\mathbf{x}\}p(\mathbf{x}) \overset{\mathcal{H}_1}{>} p\{\mathcal{H}_0|\mathbf{x}\}p(\mathbf{x});\quad p(\mathbf{x}) > 0$$

Simplificând, rezultă detectorul

$$P\{\mathcal{H}_1|\mathbf{x}\}\overset{\mathcal{H}_1}{>}p\{\mathcal{H}_0|\mathbf{x}\} \qquad (4)$$

Se alege deci acea ipoteză care are probabilitatea aposteriori maximă.

Facem câteva precizări

1) Detectorul care minimizează probabilitatea medie de eroare, P_e, pentru orice probabilități apriorice ale ipotezelor, P{$\mathcal{H}_i$}, se numește detector de probabilitate aposteriori maximă, MAP (Maximum Aposteriori Probability detector) și decide conform relației (4).

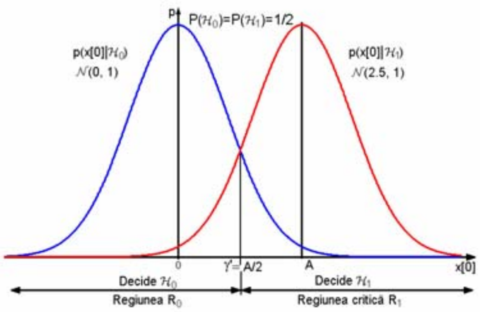
2) Detectorul care minimizează probabilitatea medie de eroare, P_e, atunci când probabilitățile apriorice ale ipotezelor, P{$\mathcal{H}_i$}, sunt egale între ele, se numește detector de plauzibilitate maximă, ML (Maximum Likelihood detector) și decide conform relației (1).

***

Pentru exemplificare, ne vom referi la cazul discutat deja, cel al detecției unei componente continue, de valoare A=2.5, dintr-un zgomot alb, gaussian, repartizat $\mathcal{N}$(0, 1), detecție ce se face pe baza unui singur eșantion. Dacă probabilitățile apriorice ale celor două ipoteze sunt egale, detectorul va fi unul de tip ML și se ajunge la

$$x[0]\overset{\mathcal{H}_1}{>}A/2=1.25$$

Repartițiile eșantioanelor x[0] posibile și regiunile critice sunt cele din figură.



Vom discuta acum acelaşi exemplu, dar pentru probabilități apriorice diferite, anume

$$P\{\mathcal{H}_0\}=1/5 \quad \text{si} \quad P\{\mathcal{H}_1\}=4/5$$

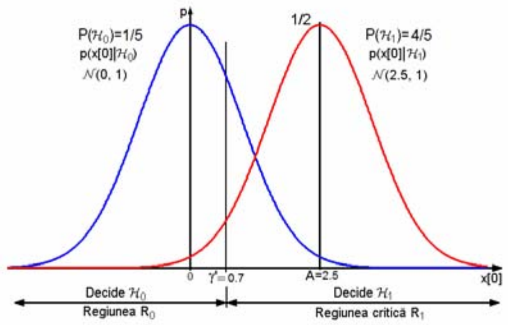
Detectorul bayesian va fi de tip MAP, care decide că ipoteza adevărată este $\mathcal{H}_1$ dacă

$$\frac{p\left(x[0]|\mathcal{H}_1\right)}{p\left(x[0]|\mathcal{H}_0\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(x[0]-2.5\right)^2}{2}\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(x[0]\right)^2}{2}\right\}}=\exp\{2.5x[0]-3.125\}>\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}$$

Logaritmând obținem

$$x[0]>\frac{3.125-\ln 4}{2.5}\cong 0.696$$

Pragul de comparare al eşantionului x[0] a scăzut de la valoarea de 1.25, corespunzătoare detectorului ML, la valoarea de 0.696, ca urmare a probabilităţilor apriorice neegale. În figură se arată repartiţiile eşantioanelor x[0] şi noul prag (MAP)



Riscul lui Bayes (sau riscul bayesian)

O generalizare a abordării detecţiei, prin minimimiyarea erorii medii, ateşează fiecărei decizii ce se poate lua, un "cost", adică o pondere a deciziei respective în bugetul erorii. C_{ij} este costul implicat de luarea deciziei $\mathcal{H}_i$, atunci când $\mathcal{H}_j$ este ipoteza adevărată Dacă indicii sunt egali, decizia este una corectă, iar dacă nu sunt egali, decizia este una incorectă. Din considerente ce se expun în materialul scris, $C_{10}>C_{01}$. Se defineşte un un cost mediu al tuturor deciziilor care se pot lua, ţinând seama de costurile acţiunilor întreprinse, de probabilităţile condiţionate şi de probabilităţile apriorice. Avem

$$E\{C\}=C_{00}P\{\mathcal{H}_0|\mathcal{H}_0\}P\{\mathcal{H}_0\}+C_{01}P\{\mathcal{H}_0|\mathcal{H}_1\}P\{\mathcal{H}_1\}$$
$$+C_{10}P\{\mathcal{H}_1|\mathcal{H}_0\}P\{\mathcal{H}_0\}+C_{11}P\{\mathcal{H}_1|\mathcal{H}_1\}P\{\mathcal{H}_1\}$$

Acest cost mediu (în sens statistic), se numeşte şi riscul lui Bayes, şi se notează cu $\mathcal{R}$, şi pentru deciziile binare are expresia

$$\mathcal{R}=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}C_{ij}P\{\mathcal{H}_i|\mathcal{H}_j\}P\{\mathcal{H}_j\}$$

Pentru costurile

$$C_{00}=C_{11}=0 \quad \text{şi} \quad C_{01}=C_{10}=1$$

riscul lui Bayes devine chiar probabilitatea medie de eroare, prezentată pentru cazul transmisiilor binare. Sunt la fel de "grave" pentru o transmisie transformarea, la recepţie, a unui unu în zero, ca şi transformarea unui zero în unu. De aceea costurile deciziilor incorecte sunt egale. Deciziile corecte nu dau erori şi de aceea costurile lor sunt nule.

În orice caz, cu în ipoteza, rezonabilă, că o decizie incorectă are un cost mai mare decât dacă nu s-ar fi produs o decizie incorectă, adică

$$C_{10}>C_{00} \quad \text{şi} \quad C_{01}>C_{11}$$

detectorul care minimizează riscul lui Bayes este cel ce decide că ipoteza adevărată este $\mathcal{H}_1$ conform relaţiei

$$\frac{p(\mathbf{x}|\mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{x}|\mathcal{H}_0)} > \frac{(C_{10}-C_{00})P\{\mathcal{H}_0\}}{(C_{01}-C_{11})P\{\mathcal{H}_1\}} = \gamma > 0 \qquad (6)$$

***

Detectorul ce minimizează riscul lui Bayes (6), pentru care avem costurile

$$C_{00} = C_{11} = 0 \quad \text{şi} \quad C_{01} = C_{10} = 1$$

alegerea ipotezei $\mathcal{H}_1$ se face dacă

$$\frac{p(\mathbf{x}|\mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{x}|\mathcal{H}_0)} > \frac{P\{\mathcal{H}_0\}}{P\{\mathcal{H}_1\}} = \gamma > 0 \qquad (7)$$

Detectorul ce minimizează riscul lui Bayes (6), pentru care avem costurile şi probabilitățile apriorice ale ipotezelor

$$C_{00} = C_{11} = 0; \;\; C_{01} = C_{10} = 1 \quad \text{şi} \quad P\{\mathcal{H}_0\} = P\{\mathcal{H}_1\}$$

alegerea ipotezei $\mathcal{H}_1$ se face dacă

$$\frac{p(\mathbf{x}|\mathcal{H}_1)}{p(\mathbf{x}|\mathcal{H}_0)} > 1 = \gamma \qquad (8)$$

Prin urmare, detectorul (6) care minimizează riscul lui Bayes are ca şi caz particular detectorul MAP (7), care, la rândul său, are ca şi caz particular detectorul ML (8).

Riscul lui Bayes sau costul mediu statistic al tuturor deciziilor posibile, devine probabilitatea minimă de eroare în cazul detectoarelor MAP şi ML.

TESTAREA IPOTEZELOR MULTIPLE

Uneori avem de ales între mai mult de două ipoteze. Aşa este cazul în recunoaşterea formelor sau în telecomunicații, când ne servim în transmisii de mai mult de două simboluri. Pentru transmitera grupurilor de câte doi biți (dibiți) utilizăm M=4 simboluri, iar pentru transmiterea grupurilor de câte trei biți (tribiți) utilizăm M=8 simboluri, etc. În astfel de transmisii se apelează la minimizarea erorii medii. Deşi şi abordarea Neyman-Pearson este posibilă, ea se aplică mai rar. Ea este potrivită în anumite probleme de căutare în bazele de date.

Presupunem că trebuie să alegem între M ipoteze

$$\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{M-1}\}$$

Notând cu C_{ij} costul alegerii ipotezei $\mathcal{H}_i$ atunci când ipoteza adevărată este $\mathcal{H}_j$ costul mediu, statistic, al tuturor deciziilor posibile este dat de riscul lui Bayes

$$\mathcal{R} = \sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P\{\mathcal{H}_i|\mathcal{H}_j\} P\{\mathcal{H}_j\}$$

În cazul comunicațiilor digitate, aşa cum am arătat, costul fiecărei acțiuni este

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pentru } i \neq j \\ 0 & \text{pentru } i = j \end{cases}$$

caz în care riscul lui Bayes devine chiar probabilitatea medie de eroare, P_e.

Urmărim să proiectăm un detector care să minimizeze riscul bayesian.

Dintre toate cele M ipoteze o vom alege pe aceea care minimizează expresia

$$C_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{M-1} C_{ij} P\{\mathcal{H}_j|\mathbf{x}\} \qquad i = 0,\ 1,\ ...,\ \text{M-1} \qquad (9)$$

pentru toate cele M valori ale indicelui i. Altfel spus, cu datele **x** măsurate, calculăm expresia (9) pentru cele M valori ale indicelui i, şi

dacă $C_k(\mathbf{x}) \le \{C_0(\mathbf{x}),\ C_1(\mathbf{x}), ...,\ C_{M-1}(\mathbf{x})\}$ decizia este: ipoteza $\mathcal{H}_k$ este adevărată

Regula dată prin relația (9) şi afirmațiile subsecvente ei, asigură minimizarea riscului lui Bayes.

***

Ne vom referi la comunicațiile digitale, în care se transmit M>2 simboluri, cu costurile aferente unei transmisii digitale de simboluri aprioric echiprobabile. Riscul lui Bayes devine atunci eroarea medie, $\mathcal{R}=P_e$. Expresia (9) devine

$$C_i(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{j=0 \\ j\ne i}}^{M-1} P\{\mathcal{H}_j|\mathbf{x}\} = \sum_{j=0}^{M-1} P\{\mathcal{H}_j|\mathbf{x}\} - P\{\mathcal{H}_i|\mathbf{x}\} \qquad i = 0,\ 1,\ ...,\ \text{M-1}$$

Suma marcată (cu roşu) este o constantă, odată ce datele **x** sunt realizate, deoarece ea nu depinde de indicele i. Minimizarea expresiei $C_i(\mathbf{x})$ se realizează maximizând termenul ce se scade, adică $P(\mathcal{H}_i|\mathbf{x})$. Rezultă regula de decizie MAP M-ară:

Dacă cea mai mare dintre toate probabilitățile aposteriori este $P(\mathcal{H}_k|\mathbf{x})$, adică

$$P\{\mathcal{H}_k|\mathbf{x}\} > P\{\mathcal{H}_i|\mathbf{x}\},\ i \ne k, \ \text{ se decide că } \mathcal{H}_k \text{ este adevărată} \qquad (10)$$

$$i = 0,\ 1,\ ...,\ M-1;$$

În fapt, cu datele **x**recepționate, se calculează M probabilități aposteriori, anume

$$\left\{P\{\mathcal{H}_0|\mathbf{x}\},\ P\{\mathcal{H}_1|\mathbf{x}\},\ ...,\ P\{\mathcal{H}_{M-1}|\mathbf{x}\}\right\}$$

Se caută cea mai mare valoare dintre aceste probabilități aposteriori și fie ea

$$P\{\mathcal{H}_k|\mathbf{x}\}$$

Atunci se ia decizia $\mathcal{H}_k$, decizie care minimizează P_e, probabilitatea medie de eroare.

***

Ca și în cazul detecției binare, decizia se ia maximizând probabilitatea aposteriori, motiv pentru care se spune că (10) este o regulă de decizie MAP, M-ară.

Un caz uzual în telecomunicații este cel în care ipotezele (simbolurile) au probabilități apriorice egale, adică

$$P\{\mathcal{H}_i|\mathbf{x}\} = \frac{1}{\text{M}}, \qquad i = 0,\ 1,\ ...,\ M-1$$

Costurile sunt cele normale într-o transmisie digitală. Aplicând formula lui Bayes avem

$$P\{\mathcal{H}_i|\mathbf{x}\} = \frac{p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_i\}P\{\mathcal{H}_i\}}{p(\mathbf{x})} = \frac{p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_i\}}{Mp(\mathbf{x})}; \quad i = 0,\ 1,\ ...,\ \text{M-1}$$

$$p(\mathbf{x}) = p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_0\}P\{\mathcal{H}_0\} + p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_1\}P\{\mathcal{H}_1\} + ... + p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_{M-1}\}P\{\mathcal{H}_{M-1}\}$$

Odată ce datele **x** sunt realizate (măsurate), valoarea lui p(**x**) nu depinde de indicele i, adică nu depinde de ipoteză. Aceeași afirmație este valabilă pentru numitorul Mp(**x**). Maximul probabilității aposteriori se obține deci pentru maximul numărătorului $p(\mathbf{x}|\mathcal{H}_i)$ care este, de fapt, plauzibilitatea ipotezei $\mathcal{H}_i$ (datele **x** sunt fixate).

Rezultă, din cele prezentate, regula de decizie ML, M-ară:

Dacă

$$p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_k\} > p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_i\},\ i \neq k \quad i = 0,\ 1,\ ...,\ M-1 \qquad (11)$$

se decide că $\mathcal{H}_k$ este ipoteza adevărată. În fapt, cu datele **x** recepționate se calculează cele M plauzibilități ale ipotezelor

$$\{p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_0\},\ p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_1\},\ ...,\ p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_{M-1}\}\}$$

Se caută care este ceamai mare dintre cele M valori calculate, și fie ea

$$p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_k\}$$

Atunci se ia decizia $\mathcal{H}_k$, decizie care minimizează P_e, probabilitatea medie de eroare.

***

Ca și în cazul detecției binare, decizia se ia maximizând plauzibilitatea ipotezei, motiv pentru care se spune că (11) este o regulă de decizie ML, M-ară.

Observație

În cazul unei detecții MAP, M-are, se urmărește maximizarea probabilității aposteriori,

$$P\{\mathcal{H}_i|\mathbf{x}\} = \frac{p\{\mathbf{x}|\mathcal{H}_i\}P\{\mathcal{H}_i\}}{p(\mathbf{x})}; \quad i = 0,\ 1,\ ...,\ \text{M-1}$$

Cum p(**x**) nu depinde de indicele i (de ipoteză), maximizarea se obține maximizând numărătorul, sau logaritmul său

$$\ln p(\mathbf{x}|\mathcal{H}_i) + \ln p(\mathcal{H}_i)$$

Putem enunța o formă modificată a regulii de detecție MAP, M-are:

Dacă

$$\ln p(\mathbf{x}|\mathcal{H}_k) + \ln p(\mathcal{H}_k) > \ln p(\mathbf{x}|\mathcal{H}_i) + \ln p(\mathcal{H}_i); \quad i = 0,\ 1,\ ...,\ M-1 \qquad (12)$$

atunci se ia decizia $\mathcal{H}_k$, decizie care minimizează P_e, probabilitatea medie de eroare.

***

Vom exemplifica cu un caz de detecție ML, ternară (M=3) efectuată pe baza unui singur eșantion, x[0], (N=1). Ipotezele diferă prin medie, zgomotul w[n] ce afectează x[0], este alb, gaussian. Pentru N eșantioane, cele trei ipoteze sunt

$$\mathcal{H}_0:\ x[n] = -A + w[n]; \quad \text{n=0, 1, ..., N-1;} \quad A>0$$

$$\mathcal{H}_1:\ x[n] = w[n]; \quad \text{n=0, 1, ..., N-1;}$$

$$\mathcal{H}_2:\ x[n] = A + w[n]; \quad \text{n=0, 1, ..., N-1;} \quad w[n] \sim \mathcal{N}(0,\ \sigma^2)$$

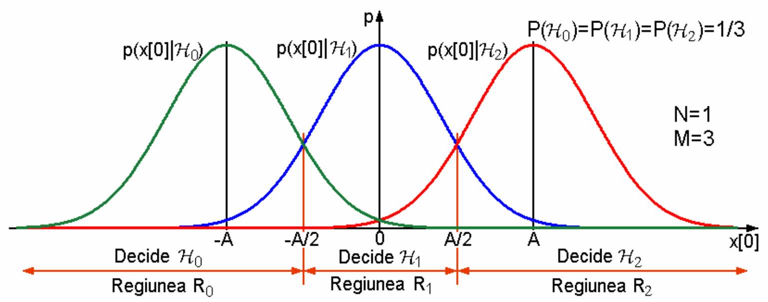
Pentru detecție vom aplica regula ML (11), dar pentru un singur eșantion. Ipotezele au probabilități appriorice egale, motiv pentru care putem efectua o detecție de tip ML.

În figură se prezintă densitățile de probabilitate ale datelor, în cele trei ipoteze, pentru A=2.5 și dispersia unitară. Determinarea celor trei regiuni de decizie se face simplu, analizând care dintre curbele de densitate este deasupra. Rezultă imediat că

$$x[0]\in R_0:\ p(x[0]|\mathcal{H}_0) > p(x[0]|\mathcal{H}_1)\ \text{si}\ p(x[0]|\mathcal{H}_0) > p(x[0]|\mathcal{H}_2) \Rightarrow \text{decide}\ \mathcal{H}_0$$

$$x[0]\in R_1:\ p(x[0]|\mathcal{H}_1) > p(x[0]|\mathcal{H}_0)\ \text{si}\ p(x[0]|\mathcal{H}_1) > p(x[0]|\mathcal{H}_2) \Rightarrow \text{decide}\ \mathcal{H}_1$$

$$x[0]\in R_2:\ p(x[0]|\mathcal{H}_2) > p(x[0]|\mathcal{H}_0)\ \text{si}\ p(x[0]|\mathcal{H}_2) > p(x[0]|\mathcal{H}_1) \Rightarrow \text{decide}\ \mathcal{H}_2$$



Dacă dorim să aplicăm metoda ML pentru N eșantioane, N>1,se pleacă de la

$$p(\mathbf{x}|\mathcal{H}_i) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-A_i)^2\right\};\ \begin{cases} i = 0,\ 1,\ 2 \\ A_0 = -A;\ A_1 = 0;\ A_2 = A \end{cases}$$

și se caută pentru care ipoteză apare maximul ei, dacă cele N eșantioane sunt realizate. Maximizarea se produce atunci când se minimizează expresia de la exponent, adică

$$\begin{aligned} D_i^2 &= \sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-A_i)^2 = \sum_{n=0}^{N-1}\left((x[n]-\bar{x})+(\bar{x}-A_i)\right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-\bar{x})^2 + 2(\bar{x}-A_i)\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-\bar{x}) + \sum_{n=0}^{N-1}(\bar{x}-A_i)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-\bar{x})^2 + 2(\bar{x}-A_i)(N\bar{x}-N\bar{x}) + N(\bar{x}-A_i)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-\bar{x})^2 + N(\bar{x}-A_i)^2 \end{aligned}$$

Termenul marcat (cu roșu) nu depinde de ipoteză. Minimul are loc pentru minimul modulului

$$|\bar{x}-A_i|$$

În fapt, se determină media eșantion a datelor se calculează cele trei module și se alege

$$\text{minimul dintre}\left\{|\bar{x}-A_0|,|\bar{x}-A_1|,|\bar{x}-A_2|\right\} \equiv \left\{|\bar{x}+A|,|\bar{x}|,|\bar{x}-A|\right\}$$

Minimul găsit va determina și ipoteza selectată pentru minimizarea erorii medii.

Probabilitatea medie minimă de eroare, pentru o detecție MAP M-ară se determină cu

$$P_e = 2\frac{M-1}{M}Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{4}}\right);\ d^2 = \frac{NA^2}{\sigma^2}$$