ESTIMARE PRIN METODA MOMENTELOR

Introducere

Metoda momentelor conduce la un estimator ușor de determinat şi uşor de implementat.

Estimatorul nu are proprietăți de optimalitate dar, cum el are proprietatea de consistență (convergență în probabilitate), dacă înregistrările sunt lungi, este util în practică.

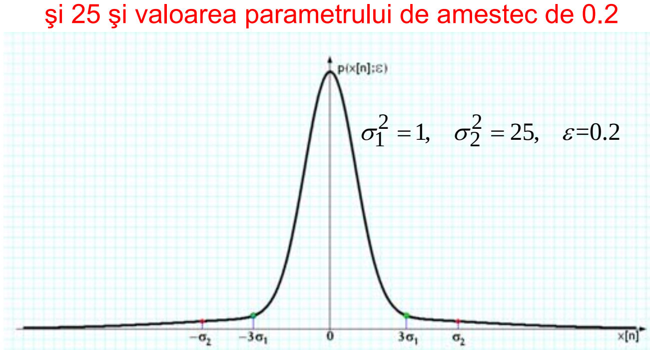
Chiar dacă performanțele estimatorului obținut nu sunt corespunzătoare, el poate fi folosit ca o estimare inițială, ce poate fi îmbunătățită prin aplicarea metodei Newton-Raphson care conduce la un estimator de plauzibilitate maximă, ML.

1

Plecăm de la un exemplu, în care se observă N eşantioane de date IID, x[n], ce constă dintr-o mixtură de două secvențe gaussiene. Cele două secvențe au mediile nule şi dispersii diferite. Amestecul este modelat prin parametrul de amestec, ε, care se consideră a fi necunoscut. Densitatea de probabilitate a datelor x[n] este

$$p\left(x[n];\varepsilon\right)=\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{x^2[n]}{2\sigma_1^2}\right\}+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{x^2[n]}{2\sigma_2^2}\right\}$$
$$=(1-\varepsilon)\phi_1\left(x[n]\right)+\varepsilon\phi_2\left(x[n]\right);\quad \varepsilon\in(0,\ 1)$$

În figură se reprezintă densitatea de repartiție a datelor pentru dispersiile de 1 şi 25 şi valoarea parametrului de amestec de 0.2



2

Dacă dispersiile sunt cunosute şi trebuie estimat, din date, parametrul de amestec, metoda momentelor oferă o soluție simplă. Avem, pentru media şi dispersia datelor x[n]

$$E\{x[n]\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x;\varepsilon)dx = (1-\varepsilon)\int_{-\infty}^{\infty} x\phi_1(x)dx + \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} x\phi_2(x)dx = 0$$

$$\begin{aligned} Disp\{x[n]\} = E\{x^2[n]\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x;\varepsilon)dx \\ &= (1-\varepsilon)\int_{-\infty}^{\infty} x^2\phi_1(x)dx + \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} x^2\phi_2(x)dx \\ &= (1-\varepsilon)\sigma_1^2 + \varepsilon\sigma_2^2 \end{aligned}$$

3

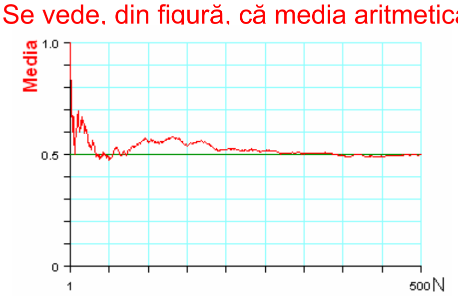
Conform legii numerelor mari, cu probabilitate 1 avem

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^k[n] \xrightarrow[N\to\infty]{} E\{x^k[n]\}$$

Pentru cazul mediei eşantion avem asigurată convergența spre media statistică

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \xrightarrow[N\to\infty]{} E\{x[n]\}$$

Pentru exemplificare considerăm un şir de N=500 de date pentru care media statistică este 0.5. Se vede, din figură, că media aritmetică converge spre 0.5



Putem deci face, pentru N suficient de mare, aproximările

$$E\{x[n]\} \cong \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n], \quad E\{x^2[n]\} \cong \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n], \quad \mathrm{N} \to \infty$$

4

Cu aceste aproximări putem deduce relația

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] = (1-\varepsilon)\sigma_1^2 + \varepsilon\sigma_2^2$$

din care se determină expresia estimatorului

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] - \sigma_1^2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}$$

Se poate verifica, prin calcul direct, că estimatorul este nedeplasat. Avem

$$\mathrm{E}\{\hat{\varepsilon}\} = \frac{1}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\mathrm{E}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] - \sigma_1^2\right\} = \frac{1}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{E}\{x^2[n]\} - \sigma_1^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[(1-\varepsilon)\sigma_1^2 + \varepsilon\sigma_2^2\right] - \sigma_1^2\right\} = \varepsilon$$

5

Se poate calcula şi dispersia estimatorului

$$Disp\{\hat{\varepsilon}\} = Disp\left\{\frac{1}{N\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2\right)}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] + \frac{\sigma_1^2}{N\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2\right)}\right\}$$

$$= \frac{1}{N^2\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2\right)}\sum_{n=0}^{N-1} Disp\{x^2[n]\}$$

Dar dispersia datelor x[n] se poate exprima în funcție de momentele de ordin 2 şi 4

$$Disp\{x^2[n]\} = E\{x^4[n]\} - E^2\{x^2[n]\}$$

$$= (1-\varepsilon)\int_{-\infty}^{\infty} x^4\phi_1(x)dx + \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} x^4\phi_2(x)dx - \left[(1-\varepsilon)\sigma_1^2 + \varepsilon\sigma_2^2\right]^2$$

Momentul de ordinul 4 al unei variabile aleatoare gaussiene se ştie că este

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4\phi_1(x)dx = 3\sigma_1^4; \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^4\phi_2(x)dx = 3\sigma_2^4$$

6

Prin calcul direct se obține momentul de ordinul 4

$$Disp\left\{x^4[n]\right\} = (1-\varepsilon)3\sigma_1^4 + \varepsilon 3\sigma_2^4 - \left[(1-\varepsilon)\sigma_1^2 + \varepsilon\sigma_2^2\right]^2$$

În final rezultă disperia estimatorului

$$Disp\left\{x^2[n]\right\} = \frac{1}{N\left(\sigma_2^2 - \sigma_1^2\right)}\left\{(1-\varepsilon)3\sigma_1^4 + \varepsilon 3\sigma_2^4 - \left[(1-\varepsilon)\sigma_1^2 + \varepsilon\sigma_2^2\right]^2\right\}$$

Reamintim că

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \xrightarrow[N\to\infty]{} E\left\{x^2[n]\right\} = (1-\varepsilon)\sigma_1^2 + \varepsilon\sigma_2^2$$

Se poate vedea că dispersia estimatorului pentru parametrul de amestec tinde asimptotic spre zero

$$Disp\left\{\hat{\varepsilon}\right\} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

7

Putem rezuma metoda momentelor.

Se ține seama de

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \xrightarrow[N\to\infty]{} \mu_k = E\left\{x[n]\right\}$$

Se exprimă momentul statistic în funcție de parametru necunoscut

$$\mu_k = h(\theta)$$

Se exprimă parametrul necunoscut în funcție de momentul statistic

$$\theta = h^{-1}(\mu_k)$$

Se estimează momentul statistic prin media aritmetică

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^k[n]$$

Se obține, prin substituire, estimatorul parametrului necunoscut

$$\hat{\theta}_k = h^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^k[n]\right)$$

8

Pentru exemplificare considerăm problema determinării componentei continue din datele afectate de un zgomot alb, gaussian

$$x[n] = A + w[n]; \quad n = 0,1,\ldots,N-1; \quad w[n] \sim \mathcal{N}\left(0, \quad \sigma^2\right)$$

Se ştie că media statistică este chiar componenta continuă, A

$$\mu = E\{x[n]\} = A$$

Dar media statistică se aproximează cu media eşantion, conform legii numerelor mari. Rezultă imediat estimatorul

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \widehat{A}$$

Un alt exemplu este legat de determinarea parametrului λ dintr-o repartiție exponențială

$$p(x[n];\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x[n]}; & x[n] \geq 0 \\ 0; & x[n] < 0 \end{cases}$$

9

Media variabilei exponențiale

$$\mu = E\{x[n]\} = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx$$

se calculează ca mai jos

$$\mu = E\{x[n]\} = \lambda x\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Bigg|_0^\infty + \lambda\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

10

Conform legii numerelor mari

$$E\{x[n]\} \cong \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (N \to \infty)$$

Rezultă, în final

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{n=o}^{N-1} x[n]}$$