Cel mai bun estimator liniar nedeplasat, BLU

De multe ori nu putem determina estimatorul MVU, chiar dacă el există. Dacă, spre exemplu nu cunoaştem densitate de repartiţie a datelor sau nu cunoaştem modelul de date, nu putem aplica metodele bazate pe CRLB sau pe statisticile suficiente. Vom căuta un estimator ce depinde liniar de date, de forma

$$\hat{\theta} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x[n]$$

Ponderile datelor se determină astfel încât estimatorul să fie nedeplasat şi cu dispersia minimă. Dacă estimatorul optimal e liniar ca funţie de date, căutarea estimatorului BLU va conduce la estimatorul optimal. Spre exemplu, pentru

$$x[n] = A + w[n]; \quad n = 0,1,\ldots,N-1, \quad w[n] \sim \mathcal{N}\left(0, \quad \sigma^2\right)$$

estimatorul MVU este liniar funcţie de date

$$\hat{A}_{MVU} = \overline{x} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} x[n]$$

Dacă căutăm un estimator BLU pentru A, de forma

$$\hat{A}_{BLU} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x[n]$$

vom găsi ponderile 1/N, adică chiar estimatorul MVU

1

Nu întotdeauna estimatorul MVU este liniar după date. De exemplu dacă se estimează componenta continuă a unui zgomot cu repartiţie uniformă

$$x[n] = w[n]; \quad n = 0,1,\ldots,N-1, \quad w[n] \sim \mathcal{U}\left(0, \quad 2\theta\right)$$

se arată că estimatorul MVU este

$$\hat{\theta}_{MVU} = \frac{N+1}{2N} \max\left\{x[n]\right\}$$

Se poate lucra, în acest caz, cu estimatorul BLU suboptimal

$$\hat{A}_{BLU} = \overline{x} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} x[n]$$

În unele probleme estimatorul BLU nu poate fi aplicat în mod direct. Spre exemplu, pentru zgomotul alb, gaussian, de medie nulă, estimatorul MVU pentru dispersie este neliniar în date:

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N-1} x^2[n]$$

Dacă aplicăm datelor o transformare neliniară adecvată, care în cazul acesta este

$$y[n] = x^2[n]$$

se poate găsi estimatorul BLU

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} a_n y[n]; \quad a_n = 1/N-1$$

2

Un alt exemplu în care se cere transformarea prealabilă a datelor este cel al repartiției log-normale, de parametru necunoscut θ

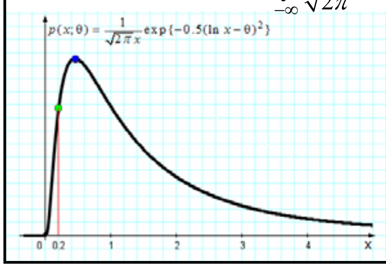
$$p\left(x[n];\theta\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x[n]}\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\ln x[n]-\theta\right)^2\right\}, & x[n]>0\\ 0 & , \ x[n]\le 0\end{cases}$$

Media repartiției log-normale se calculează cu

$$E\{x\}=\int_0^\infty x\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp\left\{-\frac{\left(\ln x-\theta\right)^2}{2}\right\}dx=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left(\ln x-\theta\right)^2}{2}\right\}dx$$

$$E\{x\}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\theta)^2}{2}}e^{-y}dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2-2y\theta-2y+\theta^2}{2}}dy$$

$$=e^{\theta+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left[y-(\theta+1)^2\right]}{2}}dy=e^{\theta+\frac{1}{2}} \quad \text{unde } y=\ln(x) \text{ sau } x=e^y$$



Este evident că estimatorul nu poate satisface condiția de nedeplasare

$$E\left\{\hat{\theta}_{BLU}\right\}=\theta$$

În figură se prezintă densitatea de repartiție log-normală pentru θ=0.2

Dacă facem transformarea prealabilă

$$y[n]=\begin{cases}\ln x[n], & x[n]>0\\ 0, & x[n]\le 0\end{cases}$$

densitatea de repartiție a variabilei aleatoare y se determină cu relația

$$p(y)=\frac{p(x(y))}{\left|\frac{dx}{dy}\right|}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}e^y}\exp\left\{-\frac{(y-\theta)^2}{2}\right\}}{e^{-y}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\theta)^2}{2}}$$

ceeace înseamnă că y are o repartiție normală, de medie θ și dispersie unitară

$$y\sim\mathcal{N}(\theta,\ 1)$$

Se poate aplica estimatorul pentru determinarea mediei unei variabile aleatoare normale

$$\hat{\theta}_{BLU}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}y[n]$$

Determinarea estimatorului BLU

Condiția ca estimatorul BLU să fie nedeplasat este

$$E\left\{\hat{\theta}\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n E\left\{x[n]\right\} = \theta, \quad \forall\theta$$

Dispersia estimatorului se calculează cu

$$Disp\left\{\hat{\theta}\right\} = E\left\{\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n x[n] - \sum_{n=0}^{N-1} a_n E\left\{x[n]\right\}\right)^2\right\}$$

$$= E\left\{\left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n\left(x[n] - E\left\{x[n]\right\}\right)\right]^2\right\}$$

Notăm cu **a** vectorul ce are ca și componente coeficienții estimatorului BLU

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-1} \end{bmatrix}^T$$

5

Estimatorul pentru parametrul necunoscut θ poate fi pus sub o formă compactă

$$\hat{\theta} = \mathbf{a}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x[n]$$

Și dispersia se poate pune sub o formă compactă

$$Disp\left\{\hat{\theta}\right\} = E\left\{\left(\mathbf{a}^T\mathbf{x} - \mathbf{a}^T E\left\{\mathbf{x}\right\}\right)\left(\mathbf{a}^T\mathbf{x} - \mathbf{a}^T E\left\{\mathbf{x}\right\}\right)^T\right\}$$

$$= E\left\{\mathbf{a}^T\left(\mathbf{x} - E\left\{\mathbf{x}\right\}\right)\left(\mathbf{x} - E\left\{\mathbf{x}\right\}\right)^T \mathbf{a}\right\}$$

$$= \mathbf{a}^T E\left\{\left(\mathbf{x} - E\left\{\mathbf{x}\right\}\right)\left(\mathbf{x} - E\left\{\mathbf{x}\right\}\right)^T\right\}\mathbf{a}$$

Matricea de covarianță a datelor se determină cu relația de definiție

$$\mathbf{C} = E\left\{\left(\mathbf{x} - E\left\{\mathbf{x}\right\}\right)\left(\mathbf{x} - E\left\{\mathbf{x}\right\}\right)^T\right\}$$

6

Dacă înlocuim matricea de covarianță dispersia se poate exprima cu

$$Disp\left\{\hat{\theta}\right\} = \mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{a}$$

„Relația de constrângere” poate fi satisfacută doar dacă:

$$E\left\{x[n]\right\} = s[n]\theta, \quad \forall \theta$$

Dacă condiția de mai sus nu este satisfăcută și, spre exemplu, avem

$$E\left\{x[n]\right\} = ne^{\theta}$$

condiția de constrângere ne conduce la

$$\sum_{n=0}^{N-1} na_n e^{\theta} = \theta, \quad \forall \theta$$

relație imposibil de satisfăcut pentru orice valoare a parametrului θ

7

Dacă datele au media dependentă liniar de parametrul necunoscut, adică

$$E\left\{x[n]\right\} = s[n]\theta, \quad \forall \theta$$

atunci datele pot fi puse sub forma

$$\begin{aligned} x[n] &= E\left\{x[n]\right\} + \left(\underbrace{x[n] - E\left\{x[n]\right\}}_{abatere\ \text{de la medie}}\right) \\ &= \theta s[n] + w[n] \end{aligned}$$

Privim astfel abaterea datelor de la medie ca pe un zgomot

$$w[n] = x[n] - E\left\{x[n]\right\}$$

Notăm cu **s** vectorul de date utile

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s[0] & s[1] & \cdots & s[N-1] \end{bmatrix}^T$$

Condiția de constrângere devine

$$\theta \sum_{n=0}^{N-1} a_n s[n] = \theta, \quad \forall \theta$$

sau, după simplificarea cu θ

$$\mathbf{a}^T \mathbf{s} = 1$$

8

Pentru a determina estimatorul BLU, este necesar să minimizăm, după vectorul **a,** dispersia

$$Disp\{\hat{\theta}\} = \mathbf{a}^T\mathbf{C}\mathbf{a}$$

cu satisfacerea condiției de constrângere

$$\mathbf{a}^T\mathbf{s} = 1$$

***

Trebuie să minimizăm o expresie, ținând seama de relația de constrângere. Se construiește lagrangeanul

$$J = \mathbf{a}^T\mathbf{C}\mathbf{a} + \lambda\left(\mathbf{a}^T\mathbf{s} - 1\right)$$

Pentru o matrice simetrică, așa cum e și matricea de covarianță, avem regula de derivare

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}\left(\mathbf{a}^T\mathbf{C}\mathbf{a}\right) = 2\mathbf{C}\mathbf{a}$$

Mai știm că

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}\mathbf{a}^T\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}\left(\mathbf{s}^T\mathbf{a}\right)^T = \mathbf{s}$$

Putem acum deriva J

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 2\mathbf{C}\mathbf{a} + \lambda\mathbf{s} = 0$$

și găsim soluția

$$\mathbf{a} = -\left(\lambda/2\right)\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}$$

9

Se introduce soluția în relația de constrângere, din care se găsește λ

$$\mathbf{a}^T\mathbf{s} = -\left(\lambda/2\right)\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s} = 1$$

Avem deci

$$-\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}}$$

Substituim λ în expresia vectorului **a** și obținem expresia vectorului ce minimizează dispersia, satisfăcând, în același timp, și relația de constrângere

$$\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}}{\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}}$$

Substituind vectorul determinat găsim minimul dispersiei estimatorului

$$Disp\{\hat{\theta}\} = \mathbf{a}_0^T\mathbf{C}\mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}}{\left(\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}\right)^2} = \frac{\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}}{\left(\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}\right)^2} = \frac{1}{\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}}$$

Estimatorul BLU determinat este

$$\hat{\theta}_{BLU} = \mathbf{a}_0^T\mathbf{x} = \frac{\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}}{\mathbf{s}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{s}}$$

10

Vom exemplifica cu un caz în care componenta continuă, A, necunoscută, este afectată de un zgomot alb, de medie nulă și dispersie (putere) cunoscută, dar căruia nu-i știm densitatea de probabilitate

Deoarece

$$E\{x[n]\} = A; \quad x[n] = A + w[n]; \quad \text{n=0,1,...,N-1}$$

vectorul de semnal se ia

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{1}$$

Zgomotul w[n] fiind alb, matricea de covarianță are o formă diagonală

$$\mathbf{C} = \sigma^2 \mathbf{I}_u$$

Aplicând formula stabilită pentru determinarea estimatorului BLU obținem

$$\hat{A} = \frac{\mathbf{1}^T \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I}_u \mathbf{x}}{\mathbf{1}^T \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I}_u \mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{x}}{\mathbf{1}^T \mathbf{1}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \overline{x}$$

ceeace înseamnă că, oricare ar fi repartiția datelor, estimatorul BLU al componentei continue este media eșantion

11

În stabilirea relației anterioare am ținut seama de expresiile a două produse

$$\mathbf{1}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

$$\mathbf{1}^T \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = N$$

Dispersia estimatorului BLU se obține înlocuind în formulă. Ea este

$$Disp\{\hat{A}\} = \frac{1}{\mathbf{1}^T \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I}_u \mathbf{1}} = \frac{\sigma^2}{N}$$

oricare ar fi densitatea de probabilitate a zgomotului w[n] ce afectează A.

12

Vom considera acum acelaşi semnal continuu *A*, dar afectat de un zgomot de medie nulă, cu eșantioanele necorelate,dar în care dispersiile eşantioanelor de zgomot diferă între ele

$$Disp\{w[n]\} = \sigma_n^2, \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

Deoarece eșantioanele de zgomot sunt necorelate, toate elementele matricei de covarianță sunt nule, cu excepția celor de pe diagonala principală care sunt dispersiile eșantioanelor. Se dau matricea de covarianță și inversa ei

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{N-1}^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_0^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_1^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{N-1}^{-2} \end{bmatrix}$$

13

Pentru determinarea estimatorului BLU calculăm mai întâi numărătorul expresiei sale

$$\mathbf{1}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_1^{-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{N-1}^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{x[0]}{\sigma_0^2} \\ \dfrac{x[1]}{\sigma_1^2} \\ \vdots \\ \dfrac{x[N-1]}{\sigma_{N-1}^2} \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x[n]}{\sigma_n^2}$$

14

și apoi numitorul

$$\mathbf{1}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_0^{-2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_1^{-2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{N-1}^{-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{\sigma_n^2}$$

Putem da acum expresia estimatorului BLU pentru A

$$\hat{A}_{BLU}=\frac{\sum_{n=0}^{N-1}\frac{x[n]}{\sigma_n^2}}{\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{\sigma_n^2}}$$

15

Se poate calcula, cu cele stabilite deja, dispersia estimatorului

$$Disp\left\{\hat{A}_{BLU}\right\}=\frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{\sigma_n^2}}=\frac{1}{S^2}$$

Coeficienții de ponderare a datelor, elemente ale vectorului **a,** sunt

$$a_n=\frac{1}{S}\frac{1}{\sigma_n^2}$$

Estimatorul BLU pentru cazul parametrului vector necunoscut

Dacă avem de estimat BLU p parametri, aceștia se organizează sub forma unui vector

$$\boldsymbol{\theta}_{p\times 1}=\begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_p\end{bmatrix}^T$$

Expresiile celor p estimatori BLU sunt de forma

$$\hat{\theta}_i=\sum_{n=0}^{N-1}a_{i,n}x[n],\quad i=1,2,\ldots,p$$

16

Explicit, cele p relații de determinare a estimatorilor BLU, pentru cele p componente sunt

$$\hat{\theta}_1 = a_{1,0}x[0] + a_{1,1}x[1] + \ldots + a_{1,N-1}x[N-1]$$
$$\hat{\theta}_2 = a_{2,0}x[0] + a_{2,1}x[1] + \ldots + a_{2,N-1}x[N-1]$$
$$\vdots$$
$$\hat{\theta}_p = a_{p,0}x[0] + a_{p,1}x[1] + \ldots + a_{p,N-1}x[N-1]$$

Aceste p relații se pot rescrie și sub o formă matriceală

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_p \end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{p\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & \cdots & a_{2,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,0} & a_{p,1} & \cdots & a_{p,N-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{p\times N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{N\times 1}}$$

17

sau, cu notațiile matriceale obișnuite

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Pentru asigurarea condiției de nedeplasare a estimatorului este necesar să avem

$$E\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\} = \mathbf{A}E\{\mathbf{x}\} = \boldsymbol{\theta}, \quad \forall \boldsymbol{\theta}$$

relație care poate fi îndeplinită pentru orice vector θ dacă vectorul mediei datelor are forma

$$E\{\mathbf{x}\}_{N\times 1} = \mathbf{H}_{N\times p}\boldsymbol{\theta}_{p\times 1}$$

Substituind, se obține condiția ca să avem un estimator vector nedeplasat

$$\mathbf{A}\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$$

conditie care afirmă că produsul **AH** este o matrice unitate

$$\mathbf{A}_{p\times N}\mathbf{H}_{N\times p} = \mathbf{I}_{u\ p\times p}$$

Dacă vectorul linie din matricea **A** este

$$\mathbf{a}_i^T = \begin{bmatrix} a_{i,0} & a_{i,1} & . & . & a_{i,N-1} \end{bmatrix} \qquad i = 1,2,\ldots,p$$

18

matricea **A** se poate pune sub forma

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & \cdots & a_{2,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,0} & a_{p,1} & \cdots & a_{p,N-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p^T \end{bmatrix}$$

În structura matricei **H** evidențiem vectorii coloană care o compun

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_p \end{bmatrix}$$

Cu aceste notații, condiția de constrângere ia forma

$$\mathbf{AH}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Putem deduce că avem

$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{h}_j=\delta_{i,j}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \; ; \quad i,j=1,2,\ldots,p$$

Conform cu formulele stabilite pentru parametri necunoscuți scalari, aplicate fiecărei componente, rezultă formele celor p estimatori BLU

$$\hat{\theta}_i=\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \; ; \quad i=1,2,\ldots,p$$

și cele p dispersii ale estimatorilor

$$Disp\left\{\hat{\theta}_i\right\}=\mathbf{a}_i^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a}_i \; ; \quad i=1,2,\ldots,p$$

Matricea parametrilor optimi se poate pune sub forma

$$\mathbf{A}_0=\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}$$

vectorul estimatorilor BLU fiind

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{BLU}=\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}$$

Matricea de covarianță a estimatorilor este

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}}=\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}$$

Estimatorul BLU devine estimator MVU pentru modelul liniar generalizat, în care am admis că:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w} \ ; \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \quad \mathbf{C}\right)$$

media datelor fiid liniară în vectorul parametru θ, cerință pentru a putea stabili existența unui estimator BLU. Din modelul de mai sus rezultă

$$E\left\{\mathbf{x}\right\} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$$

Teorema Gauss-Markov

Dacă datele **x** urmează un model linia generalizat

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w} \ ; \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \quad \mathbf{C}\right)$$

în care $\mathbf{H}_{Nxp}$ este o matrice de observare cunoscută, θ_{px1} este un vector necunoscut, format cu paramerii ce trebuie determinați iar $\mathbf{w}_{Nx1}$ este un vector de zgomot de medie nulă și matrice de covarianță **C**, dar având o densitate de probabilitate oarecare, necunoscută, estimatorul BLU pentru vectorul θ este

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{BLU} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}$$

și are matricea de covarianță **C**, dată de expresia

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}$$

21

Dispersiile componentelor vectorului de estimare sunt minime și au valorile

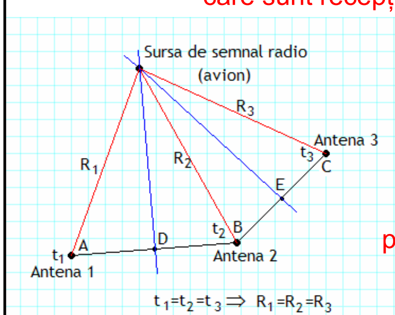
$$Disp\left\{\hat{\theta}_i\right\} = \left[\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\right]_{i,i}$$

și sunt extrase de pe diagonala principală a matricei de covarianță a estimatorului vector.

***

SISTEMUL TDOA

Vom analiza un exemplu privind localizarea unei surse ce emite semnale radio, care sunt recepționate de mai multe antene fixe.



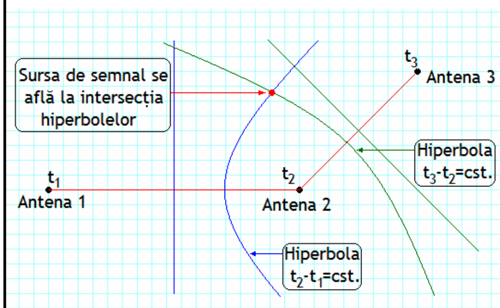
Semnalul radio este emis, de exemplu, de către un avion și este receptionat de trei antene fixe. Calculând diferențele timpilor de sosire a undelor la antene, putem localiza sursa de semnal la intersecția a două hiperbole. În figură se prezintă un caz particular, pentru care undele sosesc în același timp la cele trei antene. Sursa se află la intersecția mediatoarelor segmentelor ce unesc antenele

22

Vom considera un caz mai general, în care recepția se face cu N antene. Dacă sursa emite un semnal la momentul (necunoscut) T_0, recepția are loc, la antena i la momentul

$$t_i = T_0 + \frac{R_i}{c} + \varepsilon_i \quad ; \quad i = 0,1,\ldots,N-1$$

Am notat cu c viteza undelor electromagnetice, cu R_i distanța dela sursă antena i; zgomotul ε_i este cauzat de procedeul de măsurare, eșantioanele sale având media nulă și dispersia cunoscută iar zgomotele sunt necorelete



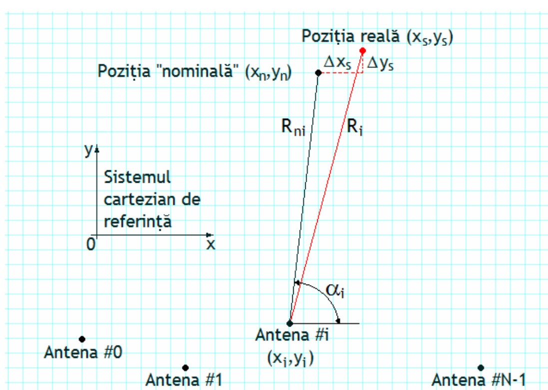
Vectorul parametrilor necunoscuți este constituit din coordonatele sursei de semnal

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} x_s & y_s \end{bmatrix}^T$$

Distanța de la sursă la antena i este

$$R_i = \sqrt{\left(x_s - x_i\right)^2 + \left(y_s - y_i\right)^2}; \quad i = 0,1,\ldots,N-1$$

23



În sistemele de urmărire (tracking) ale sursei radio dispunem, din măsurări efectuate anterior, de o poziție "nominală" a sursei, apropiată de poziția ei efectivă. Pentru "liniarizarea" problemei vom considera ca parametru vector

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \Delta x_s & \Delta y_s \end{bmatrix}^T$$

ale cărui componente au valori mici, reprezentând erorile geometrice de localizare

$$\Delta x_s = x_s - x_n; \quad \Delta y_s = y_s - y_n$$

24

Pentru liniarizare vom dezvolta distanța sursă-antenă în serie Taylor, de ordinul unu

$$R_i \cong R_{ni} + \frac{x_n - x_i}{R_{ni}} \Delta x_s + \frac{y_n - y_i}{R_{ni}} \Delta y_s; \quad i = 0,1,\dots,N-1$$

Dacă substituim această formă liniară a distanței în expresia timpilor obținem

$$t_i \cong T_0 + \frac{R_{ni}}{c} + \frac{x_n - x_i}{cR_{ni}} \Delta x_s + \frac{y_n - y_i}{cR_{ni}} \Delta y_s + \varepsilon_i; \quad i = 0,1,\dots,N-1$$

Din figură se vede că putem scrie relațiile

$$\frac{x_n - x_i}{R_i} = \cos\alpha_i; \quad \frac{y_n - y_i}{R_i} = \sin\alpha_i; \quad i = 0,1,\dots,N-1$$

care introduse în expresia timpului ne conduc la

$$t_i \cong T_0 + \frac{R_{ni}}{c} + \frac{\cos\alpha_i}{c} \Delta x_s + \frac{\sin\alpha_i}{c} \Delta y_s + \varepsilon_i; \quad i = 0,1,\dots,N-1$$

25

Notăm

$$\tau_i = t_i - \frac{R_{ni}}{c}; \quad i = 0,1,\dots,N-1$$

și obținem

$$\tau_i \cong T_0 + \frac{\cos\alpha_i}{c} \Delta x_s + \frac{\sin\alpha_i}{c} \Delta y_s + \varepsilon_i; \quad i = 0,1,\dots,N-1$$

Cum momentul emiterii semnalului radio de către sursă nu se cunoaște, îl vom elimina, calculând N-1 diferențe, care pot fi măsurate

$$\xi_1 = \tau_1 - \tau_0; \quad \xi_2 = \tau_2 - \tau_1; \ \dots; \quad \xi_{N-1} = \tau_{N-1} - \tau_{N-2}$$

Diferențele (măsurabile) sut dependente de erorile de determinare

$$\xi_i = \frac{\cos\alpha_i - \cos\alpha_{i-1}}{c} \Delta x_s + \frac{\sin\alpha_i - \sin\alpha_{i-1}}{c} \Delta y_s + \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1};$$

$$i = 1,\dots,N-1$$

26

Cele N-1 relații se explicitează

$$\xi_1 = \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0}{c}\Delta x_s + \frac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_0}{c}\Delta y_s + \varepsilon_1 - \varepsilon_0$$
$$\xi_2 = \frac{\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1}{c}\Delta x_s + \frac{\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1}{c}\Delta y_s + \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$
$$\vdots$$
$$\xi_{N-1} = \frac{\cos\alpha_{N-1} - \cos\alpha_{N-2}}{c}\Delta x_s + \frac{\sin\alpha_{N-1} - \sin\alpha_{N-2}}{c}\Delta y_s + \varepsilon_{N-1} - \varepsilon_{N-2}$$

și se trec sub formă matriceală

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{N-1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\xi}_{(N-1)\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 - \cos\alpha_0 & \sin\alpha_1 - \sin\alpha_0 \\ \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 & \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 \\ \vdots & \vdots \\ \cos\alpha_{N-1} - \cos\alpha_{N-2} & \sin\alpha_{N-1} - \sin\alpha_{N-2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_{(N-1)\times 2}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_s \\ \Delta y_s \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}_{2\times 1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{N-1} - \varepsilon_{N-2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_{(N-1)\times 1}}$$

Cu notații matriceale uzuale am stabilit relația

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}$$

Se vede că

$$\mathbf{w} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{N-1} - \varepsilon_{N-2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_{(N-1)\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{(N-1)\times N}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{N-1} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{N-1}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Matricea de covarianță a zgomotului de măsurare este de forma

$$\mathbf{C}_\varepsilon = \sigma^2 \mathbf{I}_u$$

iar a zgomotului rezultat în urma prelucrării datelor

$$\mathbf{C} = E\left\{(\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon})^T\right\} = E\left\{\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{A}^T\right\} = \mathbf{A}E\left\{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T\right\}\mathbf{A}^T$$
$$= \mathbf{A}\mathbf{C}_\varepsilon\mathbf{A}^T = \sigma^2\mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

Aplicăm relațiile de determinare a estimatorului BLU pentru vectorul parametrilor necunoscuți

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \Delta x_S & \Delta y_S \end{bmatrix}^T$$

Avem, pentru estimatorul BLU

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\mathbf{H}^T \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{H}\right]^{-1} \mathbf{H}^T \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{\xi}$$

$$= \sigma^2\left[\mathbf{H}^T\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{H}\right]^{-1} \mathbf{H}^T \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{\xi}$$

$$= \left[\mathbf{H}^T\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{H}\right]^{-1} \mathbf{H}^T \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\boldsymbol{\xi}$$

ce are matricea de covarianță

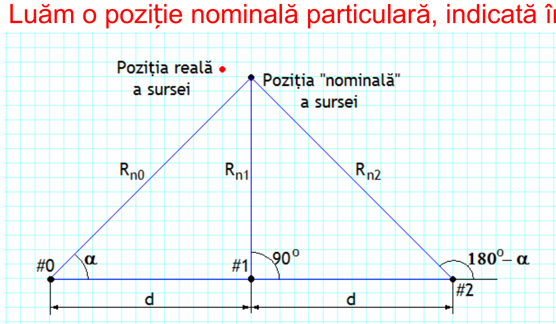
$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \sigma^2\left[\mathbf{H}^T\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{H}\right]^{-1}$$

Dispersiile fiecărui estimator scalar se calculează cu elementele diagonalei principale a matricei de covarianță

$$Disp\left\{\hat{\theta}_i\right\} = \sigma^2\left[\left[\mathbf{H}^T\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{H}\right]^{-1}\right]_{i,i}$$

29

Vom analiza un caz particular, în care se utilizează N=3 antene, coliniare, ca în figură. Luăm o poziție nominală particulară, indicată în figură



Pentru valorile funcțiilor trigonometrice implicate în acest caz avem

$$\cos\alpha_0 = \cos\alpha \qquad \sin\alpha_0 = \sin\alpha$$

$$\cos\alpha_1 = 0 \qquad \sin\alpha_1 = 1$$

$$\cos\alpha_2 = -\cos\alpha \qquad \sin\alpha_2 = \sin\alpha$$

Rezultă forma particulară a matricei de observare

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} 0-\cos\alpha & 1-\sin\alpha \\ -\cos\alpha - 0 & \sin\alpha - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} -\cos\alpha & 1-\sin\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha - 1 \end{bmatrix}$$

30

Matricea **A** are forma

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Calculăm produsul

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

determinantul produsului

$$\left|\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right|=4-1=3$$

și matricea inversă a matricei produs

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

31

Determinăm expresia produsului matriceal

$$\mathbf{H}^T\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{H}=\frac{1}{3c^2}\begin{bmatrix}-\cos\alpha & -\cos\alpha\\ 1-\sin\alpha & \sin\alpha-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\cos\alpha & 1-\sin\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3c^2}\begin{bmatrix}-3\cos\alpha & -3\cos\alpha\\ 1-\sin\alpha & \sin\alpha-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\cos\alpha & 1-\sin\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{c^2}\begin{bmatrix}2\cos^2\alpha & 0\\ 0 & \frac{2}{3}(1-\sin\alpha)^2\end{bmatrix}$$

ce are determinantul

$$\left|\mathbf{H}^T\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{H}\right|=\frac{4}{3c^4}\cos^2\alpha\left(1-\sin\alpha\right)^2$$

32

Calculăm inversa produsului matriceal

$$\left[\mathbf{H}^T\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{H}\right]^{-1}=\frac{3c^4}{4}\frac{1}{\cos^2\alpha\left(1-\sin\alpha\right)^2}\begin{bmatrix}\frac{2}{3c^2}\left(1-\sin\alpha\right)^2 & 0\\ 0 & \frac{2}{c^2}\cos^2\alpha\end{bmatrix}$$

$$=c^2\begin{bmatrix}\frac{1}{2\cos^2\alpha} & 0\\ 0 & \frac{3}{2\left(1-\sin\alpha\right)^2}\end{bmatrix}$$

33

Calculăm acum factorul matriceal din estimatorul BLU, ce ponderează măsurările diferențelor

$$\left[\mathbf{H}^T\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{H}\right]^{-1}\mathbf{H}^T\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1}$$

$$=c^2\begin{bmatrix}\frac{1}{2\cos^2\alpha} & 0\\ 0 & \frac{3}{2\left(1-\sin\alpha\right)^2}\end{bmatrix}\frac{1}{c}\begin{bmatrix}-\cos\alpha & -\cos\alpha\\ 1-\sin\alpha & \sin\alpha-1\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{c}{3}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2\cos\alpha} & -\frac{1}{2\cos\alpha}\\ \frac{3}{2\left(1-\sin\alpha\right)} & -\frac{3}{2\left(1-\sin\alpha\right)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=c\begin{bmatrix}-\frac{1}{2\cos\alpha} & -\frac{1}{2\cos\alpha}\\ \frac{1}{2\left(1-\sin\alpha\right)} & -\frac{1}{2\left(1-\sin\alpha\right)}\end{bmatrix}$$

34

Se obține estimatorul BLU vector

$$\begin{bmatrix} \Delta x_s \\ \Delta y_s \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2\cos\alpha} & -\dfrac{1}{2\cos\alpha} \\ \dfrac{1}{2(1-\sin\alpha)} & -\dfrac{1}{2(1-\sin\alpha)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

din care se deduc estimatorii BLU scalari

$$\Delta x_s = -\frac{c}{2\cos\alpha}\left(\xi_1 + \xi_2\right)$$

$$\Delta y_s = \frac{c}{2(1-\sin\alpha)}\left(\xi_1 - \xi_2\right)$$

Matricea de covarianță a estimatorului vector este

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \sigma^2 \left[\mathbf{H}^T \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1} \mathbf{H}\right]^{-1} = c^2\sigma^2 \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\cos^2\alpha} & 0 \\ 0 & \dfrac{3}{2(1-\sin\alpha)^2} \end{bmatrix}$$

35

De pe diagonala principală a matricei de covarianță se extrag dispersiile estimatorilor scalari

$$Disp\{\Delta x_s\} = \frac{c^2}{2\cos^2\alpha};$$

$$Disp\{\Delta y_s\} = \frac{3c^2\sigma^2}{2(1-\sin\alpha)^2}$$

Dispersii mici se obțin (vezi figura) pentru

$$\alpha \to 0$$

și ele sunt

$$Disp\{\Delta x_s\} = \frac{c^2}{\sigma^2};$$

$$Disp\{\Delta y_s\} = \frac{3c^2\sigma^2}{2}$$

36