MODELE LINIARE

Foarte multe probleme de estimare se referă la modele liniare de semnal. Vom considera, pentru exemplificare, cazul în care semnalul util A+Bn, cu parametrii necunoscuți A și B, este afectat de zgomotul alb, gaussian, w[n]. Secvența de date, accesibilă măsurării, x[n], este

$$x[n] = A + Bn + w[n]; \quad w[n] \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right); \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Dând lui n toate cele N valori, obținem un set de N ecuații

$$\begin{aligned}
n = 0: &\quad x[0] = A + B \cdot 0 + w[0] \\
n = 1: &\quad x[1] = A + B \cdot 1 + w[1] \\
n = 2: &\quad x[2] = A + B \cdot 2 + w[2] \\
\vdots &\quad \vdots \\
n = N-1: &\quad x[N-1] = A + B \cdot (N-1) + w(N-1)
\end{aligned}$$

1

care pot fi rescrise sub formă matriceală

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{N\times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & N-1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_{N\times 2}} \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}_{2\times 1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \\ \vdots \\ w(N-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_{N\times 1}}$$

vectorul parametrilor necunoscuți fiind

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}^T$$

Utilizând notația matriceală obişnuită, modelul de semal **x** poate fi pus sub forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}; \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_u\right)$$

în care **w,** ce are componentele IID, are matricea de covarianță de formă diagonală. Matricea **H** se numește “matrice de observare”

2

Ne punem problema dacă există sau nu există un estimator MVU eficient pentru vectorul parametrilor din modelul liniar de date. Reamintim că, pentru existența estimatorului MVU eficient, este necesar şi suficient să avem (revezi teorema Cramer=Rao)

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})\left[f(\mathbf{x})-\boldsymbol{\theta}\right]$$

estimatorul fiind

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = f(\mathbf{x})$$

ce are matricea de covarianță

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$$

Vectorul **x** este gaussian deoarece provine dintr-o transformare afină a vectorului gaussian **w.** Pentru a preciza distribuția vectorului **x** de date este deci suficientă deteminarea mediei şi a matricei sale de covarianță, identică cu a zgomotului. Avem

$$\boldsymbol{\mu} = E\{\mathbf{x}\} = E\{\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}+\mathbf{w}\} = E\{\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\} + E\{\mathbf{w}\}$$
$$= \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{0} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$$

3

$$p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^N}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{x}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T(\mathbf{x}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})\right\}$$

Înlocuind valorile măsurate ale componentelor vectorului de date **x** se obține funcția de plauzibilitate. Logaritmând găsim că

$$\ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = -N\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right) - \frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{x}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T(\mathbf{x}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})$$

şi după derivarea în raport cu vectorul θ rezultă

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{x}^T\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{H}^T\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{H}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right)$$

Un scalar este neafectat de transpunere, aşa că

$$\left(\mathbf{x}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right)^T = \mathbf{x}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{H}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$$

motiv pentru care avem

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{x}^T\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{H}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right)$$

4

În literatura de specialitate se dau următoarele reguli de derivare

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\mathbf{b}\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{b} \qquad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\right) = 2\mathbf{A}^T\boldsymbol{\theta}, \text{ pentru } \mathbf{A}^T = \mathbf{A}$$

Aplicăm aceste reguli de calcul şi obținem

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{x}^T\mathbf{H}\right)\boldsymbol{\theta} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{x}\right)^T\boldsymbol{\theta} = \mathbf{H}^T\mathbf{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta}^T\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)\boldsymbol{\theta} = 2\mathbf{H}^T\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$$

deoarece este îndeplinită condiția cerută de regula a doua de derivare

$$\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^T = \mathbf{H}^T\mathbf{H}$$

Substituim aceste rezultate în expresia derivatei şi obținem

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\mathbf{H}^T\mathbf{H}}{\sigma^2}\left[\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}\right]$$

5

Reamintim că existența unui estimator MVU eficient este condiționată de faptul că putem pune derivata sub forma

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})\left[f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta}\right]$$

Analizând forma derivatei stabilite de noi pentru modelul liniar, forțând un factor comun pentru a lăsa parametrul θ singur, obținem

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\mathbf{H}^T\mathbf{H}}{\sigma^2}\left[\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}\right]$$

Tot ca rezultat al aplicării teoremei Cramer-Rao rezultă, prin identificare, estimatorul şi matricea sa de covarianță

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{x} \qquad \mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \sigma^2\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}$$

Vom arăta că estimatorul este nedeplasat. Mai întâi îi modificăm expresia

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{x} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\left(\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}\right)\\ &= \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)\boldsymbol{\theta} + \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{w}\\ &= \boldsymbol{\theta} + \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{w}\end{aligned}$$

6

Deoarece zgomotul **w** este de medie nulă avem

$$E\left\{\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{w}\right\} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T E\{\mathbf{w}\} = \mathbf{0}$$

Mediind forma modificată a estimatorului şi ținând seama de media de mai sus obținem imediat

$$E\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\} = \boldsymbol{\theta}$$

ceeace înseamnă că estimatorul dedus este nedeplasat. Deoarece satisface cerințele teoremei Cramer-Rao este de tip MVU, eficient. Estimatorul vector are o repartiție gaussiană

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\theta},\quad \sigma^2\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\right)$$

Este posibil să fim interesați de estimarea semnalului

$$\mathbf{s} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$$

şi nu de estimarea vectorului de parametri necunoscuți. În acest caz, estimatorul MVU eficient, pentru semnalul util este

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{H}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{x}$$

7

Estimatorul pentru vectorul θ este o funcție liniară de vectorul gaussian de date **x**, deci este gaussian. Aceeaşi observație se face pentru estimatorul de semnal, **s**. Media sa este **H**θ. Matricea de covarianță a estimatorului pentru semnal se poate deduce prin calcul direct

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\hat{s}} &= E\left\{\left(\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right)\left(\mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right)^T\right\} \\
&= E\left\{\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right)^T\mathbf{H}^T\right\} \\
&= \mathbf{H}E\left\{\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right)^T\right\}\mathbf{H}^T \\
&= \mathbf{H}\mathbf{C}_{\hat{\theta}}\mathbf{H}^T \\
&= \sigma^2\mathbf{H}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T
\end{aligned}$$

Putem deci afirma că

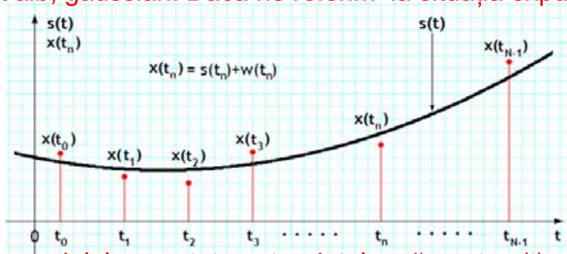
$$\hat{\mathbf{s}} \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{H}\boldsymbol{\theta},\quad \sigma^2\mathbf{H}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\right)$$

8

Exemple de aplicare ale modelului liniar

Trasarea unei curbe polinomiale printre puncte

În unele situații căutăm o relație matematică între două mărimi, măsurate experimental în mai multe puncte. Măsurătorile pot fi, din multiple cauze, afectate de zgomot, de erori de măsurare ş.a. pe care le modelăm printr-un zgomot alb, gaussian. Dacă ne referim la situația expusă în figură



modelul acceptat pentru datele măsurate x(t) este

$$x(t) = s(t) + w(t)$$

Pentru semnalul util, s(t), se prezumă, din considerente pertinente modelul

$$s(t) = \theta_1 + \theta_2 t + \theta_3 t^2$$

Cu perechile t,x(t) se formează N relații

$$x(t_n) = \theta_1 + \theta_2 t_n + \theta_3 t_n^2 + w(t_n), \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

9

parametrii necunoscuți fiind cele 3 valori pentru θ. Explicităm cele N relații

$$x(t_0) = \theta_1 + \theta_2 t_0 + \theta_3 t_0^2 + w(t_0)$$
$$x(t_1) = \theta_1 + \theta_2 t_1 + \theta_3 t_1^2 + w(t_1)$$
$$x(t_2) = \theta_1 + \theta_2 t_2 + \theta_3 t_2^2 + w(t_2)$$
$$\vdots$$
$$x(t_{N-1}) = \theta_1 + \theta_2 t_{N-1} + \theta_3 t_{N-1}^2 + w(t_{N-1})$$

Aceste N ecuații se rescriu sub forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(t_0) \\ x(t_1) \\ x(t_2) \\ \vdots \\ x(t_{N-1}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 \\ 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_{N-1} & t_{N-1}^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} w(t_0) \\ w(t_1) \\ w(t_2) \\ \vdots \\ w(t_{N-1}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}}$$

10

sau, cu notațiile matriceale obişnuite

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}$$

Pentru un caz mai general, polinomul de aproximare al semnalului s(t) are gradul p-1, parametrii necunoscuți fiind cei p coeficienți ai polinomului

$$x(t_n) = \theta_1 + \theta_2 t_n + \theta_3 t_n^2 + \ldots + \theta_p t_n^{p-1} + w(t_n), \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

În această situație matricea **H** are forma

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^{p-1} \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{p-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_{N-1} & t_{N-1}^2 & \cdots & t_{N-1}^{p-1} \end{bmatrix}$$

Conform cu formula estimatorului pentru modelul liniar, stabilită anterior

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{x}$$

11

După ce au fost estimați parametrii θ se poate estima semnalul s(t) cu relația

$$\hat{s}(t) = \sum_{i=1}^{p} \hat{\theta}_i t^{i-1}$$

ANALIZA FOURIER A DATELOR

Considerăm un semnal util, compus din M armonice ale fundamentalei 1/N. Numărul N de eşantioane de semnal este considerat a fi par. Pentru respectarea teoremei de eşantionare e necesar să avem N>2M

$$x[n] = \sum_{k=1}^{M} a_k \cos\frac{2\pi k}{N}n + \sum_{k=1}^{M} b_k \sin\frac{2\pi k}{N}n + w[n];$$

$$n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$f_k = k\frac{1}{N}; \quad k = 1,2,\ldots,M \quad \text{si} \quad M < N/2$$

Zgomotul w[n] se consideră a fi de tipul alb, gaussian. Parametrii necunoscuți sunt amplitudinile armonicelor, în număr de 2M, şi sunt grupați în vectorul θ

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & . & . & a_M & b_1 & b_2 & . & . & b_M \end{bmatrix}^T$$

12

Cele N relații se pot pune sub forma

$$x[0]=a_1+a_2+\ldots+a_M$$

$$x[1]=a_1\cos\frac{2\pi}{N}+a_2\cos\frac{4\pi}{N}+\ldots+a_M\cos\frac{M2\pi}{N}+$$
$$+b_1\sin\frac{2\pi}{N}+b_2\sin\frac{4\pi}{N}+\cdots+b_M\sin\frac{M2\pi}{N}+w[1]$$

$$x[2]=a_1\cos 2\frac{2\pi}{N}+a_2\cos 2\frac{4\pi}{N}+\cdots+a_M\cos 2\frac{M2\pi}{N}+$$
$$+b_1\sin 2\frac{2\pi}{N}+b_2\sin 2\frac{4\pi}{N}+\cdots+b_M\sin 2\frac{M2\pi}{N}+w[2]$$

$$\vdots$$

$$x[N-1]=a_1\cos(N-1)\frac{2\pi}{N}+a_2\cos(N-1)\frac{4\pi}{N}+\cdots$$
$$+a_M(N-1)\cos\frac{M2\pi}{N}+b_1\sin(N-1)\frac{2\pi}{N}+b_2\sin(N-1)\frac{4\pi}{N}+\cdots$$
$$+b_M(N-1)\sin\frac{M2\pi}{N}+w[(N-1)]$$

13

şi pot fi rescrise matriceal

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x[0]\\ x[1]\\ x[2]\\ \vdots\\ x[N-1]\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix} w[0]\\ w[1]\\ w[2]\\ \vdots\\ w[N-1]\end{bmatrix}}_{\mathbf{w}}+$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cos\frac{2\pi}{N} & \cdots & \cos\frac{M2\pi}{N} & \sin\frac{2\pi}{N} & \cdots & \sin\frac{M2\pi}{N}\\ \cos 2\frac{2\pi}{N} & \cdots & \cos 2\frac{M2\pi}{N} & \sin 2\frac{2\pi}{N} & \cdots & \sin 2\frac{M2\pi}{N}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \underbrace{\cos(N-1)\frac{2\pi}{N}}_{\mathbf{h}_1} & \cdots & \underbrace{\cos(N-1)\frac{M2\pi}{N}}_{\mathbf{h}_M} & \underbrace{\sin(N-1)\frac{2\pi}{N}}_{\mathbf{h}_{M+1}} & \cdots & \underbrace{\sin(N-1)\frac{M2\pi}{N}}_{\mathbf{h}_{2M}}\end{bmatrix}}_{\mathbf{H}}\underbrace{\begin{bmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_M\\ b_1\\ \vdots\\ b_M\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}}$$

14

sau, cu notațiile matriceale uzuale

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{w}$$

matricea **H** fiind costituită din 2M vectori coloană, **h**

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_{2M} \end{bmatrix}$$

Aceşti vectori coloană sunt liniar independenți, fapt ce se verifică prin calcul direct. Pătratul normei lor este N/2. Drept urmare obținem că matricea

$$\mathbf{H}^T\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^T \\ \mathbf{h}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{2M}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_{2M} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^T\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_1^T\mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_1^T\mathbf{h}_{2M} \\ \mathbf{h}_2^T\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2^T\mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_2^T\mathbf{h}_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}_{2M}^T\mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_{2M}^T\mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_{2M}^T\mathbf{h}_{2M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N/2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & N/2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{N}{2}\mathbf{I}_u$$

15

este inversabilă şi are inversa

$$\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1} = \frac{2}{N}\mathbf{I}_u$$

Substituim în expresia estimatorului rezultatele anterioare

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{x} = \frac{2}{N}\mathbf{I}_u\mathbf{H}^T\mathbf{x} = \frac{2}{N}\mathbf{H}^T\mathbf{x}$$

$$= \frac{2}{N}\begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^T \\ \mathbf{h}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{2M}^T \end{bmatrix}\mathbf{x} = \frac{2}{N}\begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^T\mathbf{x} \\ \mathbf{h}_2^T\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{2M}^T\mathbf{x} \end{bmatrix}$$

Se deduc, în final, expresiile estimatorilor pentru amplitudinile componentelor armonice

$$\hat{a}_k = \frac{2}{N}\mathbf{h}_k\mathbf{x} = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos n\frac{k2\pi}{N};$$

$$\hat{b}_k = \frac{2}{N}\mathbf{h}_k\mathbf{x} = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin n\frac{k2\pi}{N}$$

16

Estimatorii sunt nedeplasați, ceeace se poate verifica prin calcul direct

$$E\{\hat{a}_k\} = a_k \qquad E\{\hat{b}_k\} = b_k$$

Matricea de covarianță a vectorului estimator se obține din formula stabilită, substituind inversa matricei produs

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \sigma^2 \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1} = \left(2\sigma^2/N\right)\mathbf{I}_u$$

Se găsesc limitele inferioare Cramer-Rao pentru estimatori. Deoarece estimatorul vector este, pentru modelul liniar, eficient, disperiile egalează CRLB

$$Disp\{\hat{a}_k\} = Disp\{\hat{b}_k\} = 2\sigma^2/N$$

Vom aborda acum un un caz mai simplu, în care este prezentă o singură armonică în datele x[n]

$$x[n] = a_k \cos 2\pi f_k n + b_k \sin 2\pi f_k n + w[n] \qquad f_k = k/N$$

Puterea acestei componente armonice este

$$P = \left(a_k^2 + b_k^2\right)/2$$

Un estimator “natural” pentru această putere pare a fi

$$\hat{P} = \left(\hat{a}_k^2 + \hat{b}_k^2\right)/2$$

17

Repartițiile estimatorilor amplitudinilor componentelor spectrale sunt

$$\hat{a}_k \sim \mathcal{N}\left(a_k, \ \frac{2\sigma^2}{N}\right) \qquad \hat{b}_k \sim \mathcal{N}\left(b_k, \ \frac{2\sigma^2}{N}\right)$$

Analizăm faptul dacă estimatorul puterii, introdus de noi, este sau nu este deplasat. Avem

$$E\{\hat{P}\} = \frac{1}{2}E\{\hat{a}_k^2\} + \frac{1}{2}E\{\hat{b}_k^2\}$$

Reamintim că pentru o variabilă aleatoare normală, ξ, cu repartiția

$$\xi \sim \mathcal{N}\left(E\{\xi\}, \quad Disp\{\xi\}\right)$$

este valabilă relația

$$E\{\xi^2\} = \left(E\{\xi\}\right)^2 + Disp\{\xi\}$$

cu aplicarea căreia rezultă

$$E\{\hat{a}_k^2\} = a_k^2 + \frac{2\sigma^2}{N} \qquad E\{\hat{b}_k^2\} = b_k^2 + \frac{2\sigma^2}{N}$$

În final media estimatorului considerat se calculează cu relația

$$E\{\hat{P}\} = \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} + \frac{2\sigma^2}{N} = P + \frac{2\sigma^2}{N}$$

18

Se observă că estimatorul este deplasat. Se poate afirma că, asimptotic, este nedeplasat

Se mai știe că

$$Disp\left\{\xi^2\right\} = 4\left(E\left\{\xi\right\}\right)^2 Disp\left\{\xi\right\} + 2\left(Disp\left\{\xi\right\}\right)^2$$

formulă care permite estimarea dispersiei estimatorilor pentru a și b

$$Disp\left\{\hat{a}_k^2\right\} = 4a_k^2 \frac{2\sigma^2}{N} + 2\frac{4\sigma^4}{N^2} = \frac{8\sigma^2}{N}\left(a_k^2 + \frac{\sigma^2}{N}\right)$$

$$Disp\left\{\hat{b}_k^2\right\} = 4b_k^2 \frac{2\sigma^2}{N} + 2\frac{4\sigma^4}{N^2} = \frac{8\sigma^2}{N}\left(b_k^2 + \frac{\sigma^2}{N}\right)$$

În consecință, dispersia estimatorului introdus pentru puterea componentei armonice este

$$Disp\left\{\hat{P}\right\} = \frac{1}{4}Disp\left\{\hat{a}_k^2\right\} + \frac{1}{4}Disp\left\{\hat{b}_k^2\right\}$$

$$= \frac{2\sigma^2}{N}\left(a_k^2 + b_k^2 + \frac{2\sigma^2}{N}\right) = \frac{4\sigma^2}{N}\left(P + \frac{\sigma^2}{N}\right)$$

19

Media și dispersia estimatorului pentru putere au dimensiunile

$$\left[E\left\{\hat{P}\right\}\right] = Volt^2/Ohm \qquad \left[Disp\left\{\hat{P}\right\}\right] = V^4/Ohm^2$$

O mărime adimensională ce poate caracteriza “detectabilitatea” sinusoidei din zgomot este raportul

$$r = \frac{\left(E\left\{\hat{P}\right\}\right)^2}{Disp\left\{\hat{P}\right\}} = \frac{N\left(P + 2\sigma^2/N\right)^2}{4\sigma^2\left(P + \sigma^2/N\right)} \frac{\left[Volt^2/Ohm\right]^2}{\left[Volt^4/Ohm^2\right]}$$

Dacă P=0, adică sinusoida nu e prezentă în zgomot, raportul este r=1. Dacă însă sinusoida e prezentă iar raportul semnal/zgomot, SNR,

$$SNR = \eta = P/\left(2\sigma^2/N\right)$$

este mult supraunitar, raportul se poate aproxima cu

$$r \cong \frac{NP}{4\sigma^2} = \frac{N}{2}\frac{P}{2\sigma^2} \gg 1$$

Prin urmare, dacă r este mult supraunitar, sinusoida se detectează ușor din zgomot

20

O GENERALIZARE A MODELULUI LINIAR

Modelul liniar studiat până acum considera că zgomotul este alb, gaussian. Modelul liniar se poate generaliza în sensul că se poate admite că zgomotul este colorat, având o matrice de covarianță **C.** Repartiția vectorului de zgomot **w** este

$$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0},\ \ \mathbf{C})$$

În literatura de specialitate se arată că densitatea de probabilitate a vectorului de date **x** este

$$p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}|\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{H}\boldsymbol{\theta})\right\}$$

După înlocuirea datelor **x** se obține funcția de plauzibilitate, ce depinde doar de vectorul parametrilor necunoscuți, θ. Pentru derivare procedăm astfel

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left[\mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x} - 2\boldsymbol{\theta}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-2\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{x}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta}^T\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)\boldsymbol{\theta}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-2\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}\right)^T\boldsymbol{\theta} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta}^T\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)\boldsymbol{\theta}\right]$$

21

Efectuăm operațiunile de derivare și “forțăm” forma cerută de teorema Cramer-Rao

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$$

$$= \mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\left[\left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x} - \boldsymbol{\theta}\right]$$

$$= \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})\left[\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right]$$

Prin identificare obținem expresia estimatorului pentru modelul liniar generalizat

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}$$

și matricea sa de covarianță

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}$$

Atât matricea de covarianță cât și inversa ei sunt matrice pozitiv semidefinite. Pentru orice matrice pozitiv semidefinită, deci și pentru inversa covarianței , se poate scrie o expresie de forma

$$\mathbf{C}_{N\times N}^{-1} = \mathbf{D}_{N\times N}^T\mathbf{D}_{N\times N}$$

D fiind o matrice inversabilă

22

Dacă se aplică zgomotului colorat **w** prelucrarea de semnal definită de matricea **D** se obține un zgomot **w'** având matricea de covarianță

$$E\left\{(\mathbf{Dw})(\mathbf{Dw})^T\right\} = E\left\{\mathbf{Dww}^T\mathbf{D}^T\right\} = \mathbf{D}E\left\{\mathbf{ww}^T\right\}\mathbf{D}^T$$

$$= \mathbf{DCD}^T = \mathbf{D}\left(\mathbf{D}^T\mathbf{D}\right)^{-1}\mathbf{D}^T$$

$$= \mathbf{DD}^{-1}\left(\mathbf{D}^T\right)^{-1}\mathbf{D}^T = \left(\mathbf{DD}^{-1}\right)\left(\mathbf{DD}^{-1}\right)^T$$

$$= \mathbf{I}_u\mathbf{I}_u^T = \mathbf{I}_u$$

In concluzie zgomotul colorat **w** este transformat, prin prelucrare cu matricea **D,** într-un zgomot alb, cu dispersia unitară. Operația realizată prin matricea **D** se numește “albire” iar matricea **D** se numește “matrice de albire”

$$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \quad \mathbf{C}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w'} = \mathbf{Dw} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \quad \mathbf{I}_u)$$

În consecință, modelul liniar generalizat

$$\mathbf{x} = \mathbf{H\theta} + \mathbf{w}\ , \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \quad \mathbf{C})$$

se poate transforma într-un model liniar “clasic”, transformând datele **x** în datele **x'** prin “albire” cu matricea **D**

$$\mathbf{x'} = \mathbf{Dx} = \mathbf{DH\theta} + \mathbf{Dw} = \mathbf{H'\theta} + \mathbf{w'}\ ; \quad \mathbf{w'} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \quad \mathbf{I}_u)$$

23

Matricea de observare se transformă și ea prin prelucrare cu matricea **D**

$$\mathbf{H'} = \mathbf{DH}$$

Aplicând formula de la modelul liniar “clasic” estimatorul este

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{H'}^T\mathbf{H'}\right)^{-1}\mathbf{H'}^T\mathbf{x'}$$

$$= \left[(\mathbf{DH})^T(\mathbf{DH})\right]^{-1}(\mathbf{DH})^T(\mathbf{Dx})$$

$$= \left[\mathbf{H}^T\left(\mathbf{D}^T\mathbf{D}\right)\mathbf{H}\right]^{-1}\mathbf{H}^T\left(\mathbf{D}^T\mathbf{D}\right)\mathbf{x}$$

$$= \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}$$

Tot așa se poate determina și matricea de covarianță, plecând de la modelul liniar “clasic”

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \left(\mathbf{H'}^T\mathbf{H'}\right)^{-1} = \left[(\mathbf{DH})^T(\mathbf{DH})\right]^{-1}$$

$$= \left[\mathbf{H}^T\left(\mathbf{D}^T\mathbf{D}\right)\mathbf{H}\right]^{-1}$$

$$= \left(\mathbf{H}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}$$

24