Extinderi pentru cazul estimării unui parametru vector

Dacă sunt de estimat mai mulți parametri (în număr de p) putem organiza acești parametri sub forma unui vector. Fiecare din cei p parametri are un estimator. Cei p estimatori se organizează, și ei, sub forma unui vector

$$\boldsymbol{\theta} = \left[\theta_1 \ \theta_2 \ \ldots \ \theta_p\right]^T \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\hat{\theta}_1 \ \hat{\theta}_2 \ \ldots \ \hat{\theta}_p\right]^T$$

Media statistică a estimatorului vector este vectorul ce are ca și componente mediile statistice ale componentelor estimatorului vector. Dacă fiecare dintre cei p estimatori scalari este nedeplasat, adică

$$E\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\} = \begin{bmatrix} E\left\{\hat{\theta}_1\right\} \\ E\left\{\hat{\theta}_2\right\} \\ \vdots \\ E\left\{\hat{\theta}_p\right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{\theta}$$

se spune că estimatorul vector este nedeplasat și se scrie că

$$E\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\} = \boldsymbol{\theta}$$

1

Teorema Cramer-Rao pentru parametrul vector are următorul enunț:

Dacă $p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ satisface condiția de regularitate:

$$E\left\{\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right\} = \mathbf{0}, \quad \forall \boldsymbol{\theta}$$

atunci:

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} - \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \geq \mathbf{0}$$

în sensul că matricea din stânga este pozitiv semidefinită

Cu **I(θ)** se notează matricea de informație Fisher, de dimensiuni p*p, ale cărei elemente sunt

$$\left[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})\right]_{i,j} = -E\left\{\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right\}; \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, p \\ j = 1, 2, \ldots, p \end{matrix}$$

2

Se poate găsi un estimator nedeplasat ce are dispersia minimă – adică este un estimator vector MVU eficient – dacă şi numai dacă:

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})\left[f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta} \right]$$

din care rezultă forma estimatorului și matricea sa de covarianță

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = f(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$$

* * *

"Inegalitatea matricială" are doar un caracter simbolic. Ea afirmă că matricea din stânga este pozitiv semidefinită. O astfel de matrice are elementele de pe diagonala principală nenegative, adică

$$Disp\left\{\hat{\theta}_i\right\} - \left[\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right]_{i,i} \geq 0$$

Această inegalitate scalară definește limita inferioară Cramer-Rao pentru fiecare componentă din vectorul estimator, adică

$$Disp\left\{\hat{\theta}_i\right\} \geq \left[\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right]_{i,i} = CRLB_i$$

3

Un exemplu în care modelul de semnal este o componentă continuă, necunoscută, afectată aditiv de un zgomot alb, gaussian cu dispersia necunoscută

$$x[n] = A + w[n]; \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$w[n] \sim \mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$$

Avem p=2 necunoscute, pe care le punem sub forma unui parametru vector

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} A \\ \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Vectorul de date este gaussian și are densitatea de repartiție, dependentă de parametrul vector, de forma

$$p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^N} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A\right)^2\right\}$$

Considerând că datele sunt cunoscute și introduse în relația anterioară se obține plauzibilitatea care logaritmată conduce la

$$\ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = -\frac{N}{2}\ln 2\pi - \frac{N}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A\right)^2$$

4

Matricea de informație Fisher este, pentru acest exemplu, de forma

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} -E\left\{\dfrac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial A^2}\right\} & -E\left\{\dfrac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial A \partial \sigma^2}\right\} \\ -E\left\{\dfrac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2 \partial A}\right\} & -E\left\{\dfrac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial {\sigma^2}^2}\right\} \end{bmatrix}$$

Pentru a determina elementele matricei vom deriva plauzibilitatea logaritmică, după cum urmează:

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial A} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A\right)$$

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial A^2} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1} 1 = -\frac{N}{\sigma^2}$$

5

$$\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial A \partial \sigma^2} = \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2 \partial A} = -\frac{1}{\sigma^4}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial {\sigma^2}^2} = \frac{N}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A\right)^2$$

Pentru a efectua medierile statistice cerute de determinarea elementelor matricei Fisher, vom ține seama de următoarele medii evidente

$$E\left\{x[n]-A\right\} = E\left\{x[n]\right\} - A = A - A = 0$$

$$E\left\{\left(x[n]-A\right)^2\right\} = E\left\{\left(w[n]\right)^2\right\} = \sigma^2$$

6

şi obținem următoarele:

$$-E\left\{\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial A^2}\right\}=\frac{N}{\sigma^2}$$

$$-E\left\{\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial A\partial\sigma^2}\right\}=\frac{1}{\sigma^4}\sum_{n=0}^{N-1}E\left\{x[n]-A\right\}=0$$

$$-E\left\{\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial {\sigma^2}^2}\right\}=-\frac{N}{2\sigma^4}+\frac{1}{\sigma^6}\sum_{n=0}^{N-1}E\left\{\left(x[n]-A\right)^2\right\}$$

$$=-\frac{N}{2\sigma^4}+\frac{N}{\sigma^4}=\frac{N}{2\sigma^4}$$

7

Cu cele determinate matricea Fisher şi inversa ei devin

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix}\frac{N}{\sigma^2} & 0\\ 0 & \frac{N}{2\sigma^4}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix}\frac{\sigma^2}{N} & 0\\ 0 & \frac{2\sigma^4}{N}\end{bmatrix}$$

Un alt exemplu în care întâlnim p=2 parametri este cel al modelului de semnal determinist A+Bn, afectat aditiv de un zgomot alb, gaussian

$$x[n]=A+Bn+w[n];\quad w[n]\sim\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right);\quad n=0,1,\ldots,N-1$$

Se consideră problema estimării parametrilor A şi B ce formeză parametrul vector

$$\boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$$

Odată ce datele x[n] sunt cunoscute (măsurate), se determină plauzibilitatea logaritmică

$$\ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})=-N\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A-Bn\right)^2$$

8

şi derivatele ei de ordinul doi, în raport cu A şi B

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial A}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A-Bn\right)$$

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial B}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A-Bn\right)n$$

$$\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial A^2}=-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}1=-\frac{N}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial A\partial B}=-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}n=-\frac{1}{\sigma^2}\frac{N(N-1)}{2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial B^2}=-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}n^2=-\frac{1}{\sigma^2}\frac{N(N-1)(2N-1)}{6}$$

9

Aceste derivate nu depind de datele x[n] aşa că nu mai este necesară medierea statistică. Se determină matricea de informaţie Fisher şi inversa ei

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix}\frac{N}{\sigma^2} & \frac{N(N-1)}{2\sigma^2}\\ \frac{N(N-1)}{2\sigma^2} & \frac{N(N-1)(2N-1)}{6\sigma^2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix}\frac{2\sigma^2(2N-1)}{N(N+1)} & \frac{-6\sigma^2}{N(N+1)}\\ \frac{-6\sigma^2}{N(N+1)} & \frac{12\sigma^2}{N(N^2-1)}\end{bmatrix}$$

Elementele de pe diagonala principală a matricei inverse sunt limitele Cramer-Rao pentru dispersiile estimatorilor parametrilor necunoscuţi A şi B. Avem deci inegalităţile

$$Disp\{\hat{A}\}\geq\frac{2\sigma^2(2N-1)}{N(N+1)}\qquad Disp\{\hat{B}\}\geq\frac{12\sigma^2}{N(N^2-1)}$$

10

Vom aplica acum partea a doua a teoremei Cramer-Rao. Pentru aceasta construim

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial A} \\ \frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A-Bn\right) \\ \frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A-Bn\right)n \end{bmatrix}$$

Dacă expresia din membrul stâng este o funcție ce depinde numai de date, nu şi de parametrii necunoscuți A şi B, atunci ea este chiar estimatorul vector

$$\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\theta} = f(\mathbf{x})$$

Prin calcul direct obținem

$$\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{2(2N-1)}{N(N+1)} & \frac{-6}{N(N+1)} \\ \frac{-6}{N(N+1)} & \frac{12}{N(N^2-1)} \end{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A-Bn\right) \\ \sum_{n=0}^{N-1}\left(x[n]-A-Bn\right)n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{N(N+1)} \begin{bmatrix} 2N-1 & -3 \\ -3 & \frac{6}{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] - AN - B\frac{N(N-1)}{2} \\ \sum_{n=0}^{N-1} nx[n] - A\frac{N(N-1)}{2} - B\frac{N(N-1)(2N-1)}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{N(N+1)} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

11

unde

$$L_1 = (2N-1)\sum_{n=0}^{N-1} x[n] - 3\sum_{n=0}^{N-1} nx[n] - A(2N-1)N$$
$$+ A\frac{3N(N-1)}{2} - B\frac{(2N-1)(N-1)N}{2} + B\frac{(2N-1)(N-1)N}{2}$$
$$= (2N-1)\sum_{n=0}^{N-1} x[n] - 3\sum_{n=0}^{N-1} nx[n] - A\frac{N(N+1)}{2}$$

$$L_2 = -3\sum_{n=0}^{N-1} x[n] + \frac{6}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} nx[n] + A3N - A3N + B\frac{3N(N-1)}{2} - BN(2N-1)$$
$$= -3\sum_{n=0}^{N-1} x[n] + \frac{6}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} nx[n] - B\frac{N(N+1)}{2}$$

12

Rezultă că

$$\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{2}{N(N+1)}\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{N(N+1)}\begin{bmatrix} (2N-1)\sum_{n=0}^{N-1} x[n] - 3\sum_{n=0}^{N-1} nx[n] - A\frac{N(N+1)}{2} \\ -3\sum_{n=0}^{N-1} x[n] + \frac{6}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} nx[n] - B\frac{N(N+1)}{2} \end{bmatrix}$$

Dacă din membrul drept se separă vectorul de date obținem

$$\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{2}{N(N+1)}\begin{bmatrix} (2N-1)\sum_{n=0}^{N-1} x[n] - 3\sum_{n=0}^{N-1} nx[n] \\ -3\sum_{n=0}^{N-1} x[n] + \frac{6}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} nx[n] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

din care rezultă că expresia discutată este o funcție vector ale cărei componente depind numai de date, nu şi de parametrul necunoscut. Această funcție este estimatorul sub formă de vector

$$\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\frac{\partial \ln p(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\theta} = \frac{2}{N(N+1)}\begin{bmatrix} (2N-1)\sum_{n=0}^{N-1} x[n] - 3\sum_{n=0}^{N-1} nx[n] \\ -3\sum_{n=0}^{N-1} x[n] + \frac{6}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} nx[n] \end{bmatrix} = f(\mathbf{x})$$

Cei doi estimatori scalari pentru A şi B, respectiv, sunt

$$\hat{A} = \frac{2(2N-1)}{N(N+1)}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] - \frac{6}{N(N+1)}\sum_{n=0}^{N-1} nx[n]$$

$$\hat{B} = -\frac{6}{N(N+1)}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] + \frac{12}{N(N^2-1)}\sum_{n=0}^{N-1} nx[n]$$

Fiind satisfăcute cerințele teoremei Cramer-Rao, rezultă că cei doi estimatori sunt şi eficienți adică dispersiile lor sunt egale cu limitele inferioare Cramer-Rao

$$Disp\left\{\hat{A}\right\}=\frac{2\sigma^2(2N-1)}{N(N+1)} \qquad Disp\left\{\hat{B}\right\}=\frac{12\sigma^2}{N\left(N^2-1\right)}$$

Uneori nu suntem interesați direct de estimările parametrilor necunoscuți ci de mărimi derivate din acestea. Fie că suntem interesați de r mărimi, organizate ca vector

$$\boldsymbol{\alpha}_{r\times1}=g\left(\boldsymbol{\theta}_{p\times1}\right)$$

ce depind de cei p parametri necunoscuți prin funcția vectorială **g.** Atunci matricea pozitiv semidefinită din corpul teoremei Cramer-Rao este

$$\mathbf{C}_{\hat{\alpha}}-\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\left[\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right]^T\geq 0$$

15

Funcția **g** şi derivata ei în raport cu vectorul parametrilor, θ, sunt

$$g(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{\theta}) \\ g_2(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ g_r(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}_{r\times1} \quad ; \quad \frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1} & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_p} \\ \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1} & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_2(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_r(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1} & \frac{\partial g_r(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_r(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_p} \end{bmatrix}_{r\times p}$$

Vom relua exemplul pentru cazul în care modelul de semnal este al componentei continue afectate aditiv de un zgomot alb, gaussian. Parametrii necunoscuți sunt componenta continuă şi dispersia zgomotului. Ne interesează nu să estimăm valorile celor doi parametri ci o mărime derivată α, raportul semnal/zgomot, SNR

$$\boldsymbol{\theta}_{2\times1}=\begin{bmatrix} A \\ \sigma^2 \end{bmatrix} \qquad \alpha=\frac{A^2}{\sigma^2} \qquad (r=1) \qquad \alpha_{1\times1}=g(\boldsymbol{\theta})=\frac{\theta_1^2}{\theta_2}$$

16

În acest exemplu, α este un scalar

Calculăm derivata funcției g în raport cu vectorul θ

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\frac{\theta_1^2}{\theta_2}\right) & \frac{\partial}{\partial \theta_2}\left(\frac{\theta_1^2}{\theta_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{A^2}{\sigma^2}\right) & \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(\frac{A^2}{\sigma^2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2A}{\sigma^2} & -\frac{A^2}{\sigma^4} \end{bmatrix}$$

şi ținem seama de forma inversei matricei de informație Fisher, stabilită anterior

$$\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{N} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{N} \end{bmatrix}$$

17

Cu acestea, matricea din corpul teoremei Cramer-Rao ce este pozitiv semidefinită ia forma

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \left[\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right]^T = \begin{bmatrix} \frac{2A}{\sigma^2} & -\frac{A^2}{\sigma^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{N} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2A}{\sigma^2} \\ -\frac{A^2}{\sigma^4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2A}{N} & -\frac{2A^2}{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2A}{\sigma^2} \\ -\frac{A^2}{\sigma^4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{4A^2}{N\sigma^2} + \frac{2A^4}{N\sigma^4} = \frac{4\alpha}{N} + \frac{2\alpha^2}{N}$$

şi este un scalar. Ca o concluzie, dispersia estimatorului pentru raportul semnal/zgomot satisface inegalitatea al cărui membru drept este CRLB

$$Disp\{\hat{\alpha}\} \geq \frac{4\alpha + 2\alpha^2}{N}$$

18

O transformare particulară, destul de des întâlnită, este transformarea afină definită prin relația

$$\boldsymbol{\alpha}_{r\times 1} = \mathbf{A}_{r\times p}\boldsymbol{\theta}_{p\times 1} + \mathbf{b}_{r\times 1}$$

Între matricele de covarianță ale estimatorului vector pentru θ şi ale estimatorului vector pentru α se poate stabili o relație

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{\hat{\alpha}} &= E\left\{\left(\boldsymbol{\alpha} - E\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}\}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\alpha}} - E\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}\}\right)^T\right\} \\
&= E\left\{\left(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{b}\right)\left(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta} - \mathbf{b}\right)^T\right\} \\
&= E\left\{\mathbf{A}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right)^T \ \mathbf{A}^T\right\} \\
&= \mathbf{A}E\left\{\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - E\left\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\right\}\right)^T\right\}\mathbf{A}^T \\
&= \mathbf{A}\mathbf{C}_{\hat{\theta}}\mathbf{A}^T
\end{aligned}$$

19

Dacă estimatorul vector pentru θ este eficient atunci şi estimatorul vector pentru α este eficient şi avem

$$Disp\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}\} = \frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\left[\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right]^T$$

Dar

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}$$

aşa că obținem

$$\mathbf{C}_{\hat{\alpha}} = \mathbf{A}\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}^T$$

Marginea inferioară Cramer-Rao pentru o repartiție gaussiană generalizată

Până acum am avut în vedere doar date ale căror eşantioane erau identic distribuite şi independente statistic (IID). Pentru astfel de date matricea de covarianță este o matrice diagonală, de forma

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2\mathbf{I}_u$$

20

Vom discuta acum un caz mai general, în care eșantioanele de date pot fi corelate iar repartițiile statistice nu sunt neapărat identice. Matricea de autocorelație nu va mai fi diagonală iar valoarea medie poate diferi şi poate fi dependentă de parametrul vector necunoscut, aşa că

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}), \quad \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})\right)$$

În literatura de specialitate se arată că pentru cazul parametrului necunoscut de tip vector, elementele matricei de informație Fisher se calculează cu relația

$$\left[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})\right]_{i,j} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}\right]^T \mathbf{C}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} + \frac{1}{2} tr\left\{\mathbf{C}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \mathbf{C}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\right\} (a)$$

Dacă parametrul necunoscut este un scalar, relația de determinare a informației Fisher este

$$I(\theta) = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\mu}(\theta)}{\partial \theta}\right]^T \mathbf{C}^{-1}(\theta) \frac{\partial \boldsymbol{\mu}(\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{2} tr\left\{\left[\mathbf{C}^{-1}(\theta) \frac{\partial \mathbf{C}(\theta)}{\partial \theta}\right]^2\right\} (b)$$

21

Vom considera un exemplu simplu, în care semnalul util s[n;θ] este afectat de un zgomot alb gaussian, ceece înseamnă că eşantioanele de date x[n] sunt necorelate

$$x[n] = s[n;\theta] + w[n]; \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$w[n] \sim \mathcal{N}\left(0, \quad \sigma^2\right)$$

Vectorul mediilor se determină imediat

$$\boldsymbol{\mu}(\theta) = \left[s[0;\theta] \quad s[1;\theta] \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad s[N-1;\theta]\right]^T$$

Matricea de covarianță a datelor x[n] este identică cu matricea de covarianță a zgomotului, w[n], are formă diagonală şi nu depinde de parametrul necunoscut

$$\mathbf{C}(\theta) = E\left\{\left[\mathbf{x}(\theta) - \boldsymbol{\mu}(\theta)\right]\left[\mathbf{x}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})\right]^T\right\}$$

$$= E\left\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\right\} = \mathbf{C}_{\mathbf{w}} = \sigma^2 \mathbf{I}_u$$

Derivata matricei în raport cu parametrul necunoscut este, în consecință, nulă

$$\frac{\partial \mathbf{C}(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

22

Deoarece parametrul este un scalar se aplică a doua formulă, (b), pentru determinarea informației Fisher scalare

$$I(\theta)=\begin{bmatrix}\frac{\partial s[0;\theta]}{\partial\theta} & \frac{\partial s[1;\theta]}{\partial\theta} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial s[N-1;\theta]}{\partial\theta}\end{bmatrix}$$

$$\cdot\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}_u\begin{bmatrix}\frac{\partial s[0;\theta]}{\partial\theta} & \frac{\partial s[1;\theta]}{\partial\theta} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial s[N-1;\theta]}{\partial\theta}\end{bmatrix}^T$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{\partial s[n;\theta]}{\partial\theta}\right)^2$$

Dacă semnalul util nu depinde de un singur parametru necunoscut ci de mai mulți, organizați sub forma vectorului θ, zgomotul rămânând alb, gaussian, adică

$$\mathrm{x}[n]=s[n;\boldsymbol{\theta}]+w[n];\quad n=0,1,\ldots,N-1$$

$$w[n]\sim\mathcal{N}\left(0,\quad\sigma^2\right)$$

atunci vectorul mediei este

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix}s[0;\boldsymbol{\theta}] & s[1;\boldsymbol{\theta}] & \cdot & \cdot & \cdot & s[N-1;\boldsymbol{\theta}]\end{bmatrix}^T$$

23

Matricea de covarianță va avea forma din cazul anterior, şi este independentă de parametrul vector necunoscut

$$\mathbf{C}(\theta)=\mathbf{C}_w=\sigma^2\mathbf{I}_u$$

Se aplică acum prima dintre formulele de calcul indicate în literatura de specialitate pentru calculul elementelor matricei de informație Fisher,(a), şi obținem

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{i,j}=\begin{bmatrix}\frac{\partial s[0;\boldsymbol{\theta}]}{\partial\theta_i} & \frac{\partial s[1;\boldsymbol{\theta}]}{\partial\theta_i} & \ldots & \frac{\partial s[N-1;\boldsymbol{\theta}]}{\partial\theta_i}\end{bmatrix}$$

$$\cdot\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}_u\begin{bmatrix}\frac{\partial s[0;\boldsymbol{\theta}]}{\partial\theta_j} & \frac{\partial s[1;\boldsymbol{\theta}]}{\partial\theta_j} & \ldots & \frac{\partial s[N-1;\boldsymbol{\theta}]}{\partial\theta_j}\end{bmatrix}^T$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\partial s[n;\boldsymbol{\theta}]}{\partial\theta_i}\frac{\partial s[n;\boldsymbol{\theta}]}{\partial\theta_j}$$

24

Considerăm că urmărim să estimăm dispersia unui zgomot alb, gaussian. In acest caz modelul de date este

$$\mathbf{x}[n]=w[n];\ \ n=0,1,...,N-1;\ \ \ w[n]\sim\mathcal{N}\left(0,\ \ \sigma^2\right)$$

Vectorul mediilor nu depinde de parametrul necunoscut

$$\boldsymbol{\mu}\left(\sigma^2\right)=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0\end{bmatrix}^T$$

dar matricea de covarianță depinde de dispersie

$$\mathbf{C}\left(\sigma^2\right)=\sigma^2\mathbf{I}_u$$

Derivatele matricei de covarianță şi ale vectorului mediilor sunt

$$\frac{\partial\mathbf{C}\left(\sigma^2\right)}{\partial\sigma^2}=\mathbf{I}_u \qquad \frac{\partial\boldsymbol{\mu}\left(\sigma^2\right)}{\partial\sigma^2}=0$$

Parametrul necunoscut este unul singur şi deci se aplică a doua formulă, (b), pentru calculul informației Fisher

$$I(\theta)=\frac{1}{2}tr\left\{\left(\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}_u\mathbf{I}_u\right)^2\right\}=\frac{1}{2\sigma^4}tr\left\{\mathbf{I}_u\right\}=\frac{N}{2\sigma^4},\ \ \theta=\sigma^2$$

25

În consecință dispersia de determinare a dispersiei zgomotului satisface inegalitatea

$$Disp\left\{\sigma^2\right\}\geq\frac{2\sigma^4}{N}=\mathrm{CRLB}$$

Vom discuta acum un exemplu puțin diferit. Modelul de semnal este cel de componentă continuă necunoscută, A, dar care este o mărime aleatoare, în sensul că se poate modifica de la experiment la experiment. Se presupune că are media nulă și se caută să se estimeze dispersia componentei continue. Zgomotul ce afectează aditiv A este considerat a fi alb, gaussian, și statistic independent de variabila aleatoare A

$$x[n]=A+w[n];\ \ n=0,1,...,N-1;\ \ w[n]\sim\mathcal{N}\left(0,\ \ \sigma^2\right)$$

$$A\sim\mathcal{N}\left(0,\sigma_A^2\right) \qquad \theta=\sigma_A^2$$

După cum se poate vedea media datelor este nulă

$$E\left\{x[n]\right\}=E\left\{A+w[n]\right\}=E\left\{A\right\}+E\left\{w[n]\right\}=0$$

26

Elementele matricei de covarianță a datelor se determină prin calcul direct

$$\left[\mathbf{C}\left(\sigma_A^2\right)\right]_{i,j} = E\left\{x[i-1]x[j-1]\right\} = E\left\{\left(A+w[i-1]\right)\left(A+w[j-1]\right)\right\}$$

$$= E\left\{A^2\right\} + E\left\{Aw[i-1]\right\} + E\left\{Aw[j-1]\right\} + E\left\{w[i-1]w[j-1]\right\}$$

Atragem atenția că indicii elementelor din matrice se numerotează cu 1, 2, ... N în timp ce indicii din semnal se numerotează cu 0, 1, ... N-1 fapt ce explică formula de calcul de mai sus

Deoarece A şi w[n] sunt statistic independente avem

$$E\left\{Aw[i-1]\right\} = E\left\{A\right\}E\left\{w[i-1]\right\} = 0$$

Dacă ținem seama şi de autocorelația zgomotului alb, gaussian

$$E\left\{w[i-1]w[j-1]\right\} = \sigma^2\delta_{i-1,j-1} = \sigma^2\delta_{i,j} = \begin{cases}\sigma^2, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

obținem

$$\left[\mathbf{C}\left(\sigma_A^2\right)\right]_{i,j} = \sigma_A^2 + \sigma^2\delta_{i,j}$$

$\delta_{i,j}$ fiind simbolul lui Kronecker

27

Forma explicită a matricei de covarianță a datelor, dependentă de parametrul necunoscut este deci

$$\mathbf{C}\left(\sigma_A^2\right) = \begin{bmatrix} \sigma_A^2+\sigma^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \cdots & \sigma_A^2 \\ \sigma_A^2 & \sigma_A^2+\sigma^2 & \sigma_A^2 & \cdots & \sigma_A^2 \\ \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2+\sigma^2 & \cdots & \sigma_A^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \cdots & \sigma_A^2+\sigma^2 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_A^2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \sigma^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

28

Definim vectorul coloană **1** ca fiind

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$$

Se verifică, prin calcul direct, relația:

$$\mathbf{1}\mathbf{1}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matricea de covarianță a datelor se poate pune sub forma

$$\mathbf{C}\left(\sigma_A^2\right) = \sigma_A^2 \mathbf{1}\mathbf{1}^T + \sigma^2 \mathbf{I}_u$$

29

În literatura de specialitate se găseşte aşa numita identitate a lui Woodbury pentru inversarea unei forme matriceale

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{v}\mathbf{v}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}\mathbf{v}^T\mathbf{A}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}}$$

în care $\mathbf{A}_{n\times n}$ este o matrice iar $\mathbf{v}_{n\times 1}$ este un vector

Facem notațiile

$$\mathbf{A} = \sigma^2 \mathbf{I}_u \qquad \mathbf{v} = \sigma_A \mathbf{1}$$

şi aplicăm identitatea lui Woodbury. Avem, succesiv

$$\mathbf{C}^{-1}\left(\sigma_A^2\right) = \left(\sigma^2 \mathbf{I}_u + \sigma_A \mathbf{1} \sigma_A \mathbf{1}^T\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}_u - \frac{\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}_u \sigma_A \mathbf{1} \sigma_A \mathbf{1}^T \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}_u}{1 + \sigma_A \mathbf{1}^T \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}_u \sigma_A \mathbf{1}}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{I}_u - \frac{\sigma_A^2}{\sigma^2}\frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{\sigma^2 + \sigma_A^2 \mathbf{1}^T\mathbf{1}}$$

30

Efectuăm produsul

$$\mathbf{1}^T\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = N$$

şi obținem pentru inversa matricei de covarianță forma

$$\mathbf{C}^{-1}\left(\sigma_A^2\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{I}_u - \frac{\sigma_A^2}{\sigma^2 + N\sigma_A^2}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\right)$$

Derivatele implicate în formula de calcul a informației Fisher sunt

$$\frac{\partial \mu\left(\sigma_A^2\right)}{\partial \sigma_A^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_A^2}\mathbf{C}\left(\sigma_A^2\right) = \frac{\partial}{\partial \sigma_A^2}\left\{\sigma_A^2\mathbf{1}\mathbf{1}^T + \sigma^2\mathbf{I}_u\right\} = \mathbf{1}\mathbf{1}^T$$

31

Determinarea informației Fisher implică calculul expresiei

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{-1}\left(\sigma_A^2\right)\frac{\partial \mathbf{C}\left(\sigma_A^2\right)}{\partial \sigma_A^2} &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{I}_u - \frac{\sigma_A^2}{\sigma^2 + N\sigma_A^2}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\right)\mathbf{1}\mathbf{1}^T \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left(\mathbf{1}\mathbf{1}^T - \frac{\sigma_A^2}{\sigma^2 + N\sigma_A^2}\mathbf{1}\underbrace{\mathbf{1}^T\mathbf{1}}_{=N}\mathbf{1}^T\right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left(1 - \frac{N\sigma_A^2}{\sigma^2 + N\sigma_A^2}\right)\mathbf{1}\mathbf{1}^T \\
&= \frac{1}{\sigma^2 + N\sigma_A^2}\mathbf{1}\mathbf{1}^T
\end{aligned}$$

32

Pătratul produsului se determină uşor

$$\left[\mathbf{C}^{-1}\left(\sigma_A^2\right)\frac{\partial \mathbf{C}\left(\sigma_A^2\right)}{\partial \sigma_A^2}\right]^2 = \frac{1}{\left(\sigma^2 + N\sigma_A^2\right)^2}\mathbf{1}\underbrace{\mathbf{1}^T\mathbf{1}}_{=N}\mathbf{1}^T$$

$$= \frac{N}{\left(\sigma^2 + N\sigma_A^2\right)^2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Urma matricei este N aşa că, în final obținem

$$I\left(\sigma_A^2\right) = \frac{1}{2}\frac{N^2}{\left(\sigma^2 + N\sigma_A^2\right)^2}$$

33

Dispersia estimatorului dispersiei componentei continue satisface inegalitatea

$$Disp\left\{\hat{\sigma_A^2}\right\} \geq 2\left(\sigma_A^2 + \frac{\sigma^2}{N}\right)^2 = CRLB > 2\sigma_A^4$$

Comportarea asimptotică a limitei Cramer-Rao este uşor de stabilit

$$N \to \infty, \quad CRLB_{\sigma_A^2} \to 2\sigma_A^4$$

Marginea inferioară Cramer-Rao asimptotică

Notăm cu f frecvența digitală

$$f = \frac{\Omega}{2\pi} \in \left(-\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\right)$$

măsurată în cicli/eşantion. Funcția de corelație este pereche Fourier cu densitatea spectrală de putere

$$r_{xx}[k] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} P_{xx}(f)$$

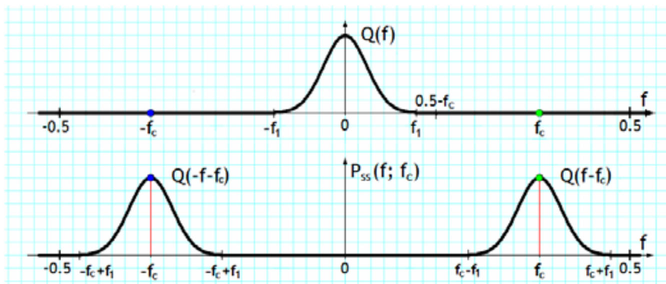
34

Se arată, în literatura de specialitate, că, asimptotic, putem determina elementele matricei de informație Fisher cu relația

$$\left[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})\right]_{i,j} \cong \frac{N}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \ln P_{xx}(f;\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln P_{xx}(f;\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} df; \quad N \to \infty$$

Vom exemplifica aplicarea formulei de mai sus pentru problema estimării frecvenței purtătoare a unui semnal modulat, atunci când se cunoaşte densitatea spectrală de putere a semnalului util în banda de bază, Q(f). Semnalul modulat este afectat de un zgomot alb, gaussian. Densitatea spectrală de putere a datelor este

$$P_{xx}(f;f_c) = Q(f-f_c) + Q(-f-f_c) + \sigma^2 = P_{ss}(f;f_c) + \sigma^2$$



35

Dacă analizăm figura vedem că e neceră satisfacerea a două constrângeri

$$f_c - f_1 \geq 0 \qquad\qquad f_c + f_1 \leq 0,5$$

Parametrul necunoscut este frecvența purtătoare

$$\theta = f_c \in (0, \quad 1/2)$$

Dacă aplicăm relația asimptotică dată, obținem pentru informația Fisher expresia

$$I(f_c) = \frac{N}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{\partial \ln P_{xx}(f;f_c)}{\partial f_c}\right]^2 df$$

Efectuăm calculul derivatei

$$\frac{\partial \ln P_{xx}(f;f_c)}{\partial f_c} = \frac{\partial}{\partial f_c} \ln\left[Q(f-f_c) + Q(-f-f_c) + \sigma^2\right]$$

$$= \frac{\dfrac{\partial Q(f-f_c)}{\partial f_c} + \dfrac{\partial Q(-f-f_c)}{\partial f_c}}{Q(f-f_c) + Q(-f-f_c) + \sigma^2}$$

36

Se poate verifica uşor egalitatea

$$\frac{\partial \ln P_{xx}(-f; f_c)}{\partial f_c} = \frac{\partial \ln P_{xx}(f; f_c)}{\partial f_c}$$

Informația Fisher se pune sub forma

$$I(f_c) = N \int_0^{1/2} \left[\frac{\partial \ln P_{xx}(f; f_c)}{\partial f_c} \right]^2 df$$

Cu schimbarea de variabilă de integrare

$$f - f_c = f'$$

avem

$$\frac{\partial Q(f - f_c)}{\partial f_c} = \frac{\partial Q(f')}{\partial f'} \frac{\partial f'}{\partial f_c} = -\frac{\partial Q(f')}{\partial f'}$$

$$df' = df$$

37

Integrala ce dă informația Fisher devine

$$I(f_c) = N \int_{-f_c}^{1/2 - f_c} \left[\frac{\partial Q(f')}{\partial f'} \frac{1}{Q(f') + \sigma^2} \right]^2 df'$$

Din condiția

$$f_c + f_1 \le 1/2$$

rezultă că

$$1/2 - f_c \ge f_1$$

iar din condiția

$$f_c - f_1 \ge 0$$

rezultă că

$$-f_c \le -f_1$$

Deoarece $Q(f')$ are suportul $f' \in [-f_1, \quad f_1]$

extinderea limitelor integralei la -0.5 și la 0.5 nu schimbă valoarea acesteia

38

In final rezultă

$$I(f_c) = N\int_{-1/2}^{1/2}\left[\frac{\partial Q(f)}{\partial f}\frac{1}{Q(f)+\sigma^2}\right]^2 df$$

$$= N\int_{-1/2}^{1/2}\left\{\frac{\partial}{\partial f}\ln\left[Q(f)+\sigma^2\right]\right\}^2 df; \quad N\to\infty$$

Pentru exemplificare considerăm o densitate spectrală de putere gaussiană

$$Q(f) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{f}{\sigma_f}\right)^2}; \quad \sigma_f \ll \frac{1}{2}$$

pentru care

$$\frac{\partial Q(f)}{\partial f} = -\frac{f}{\sigma_f^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{f}{\sigma_f}\right)^2}$$

39

Punem expresiile anterioare în formula asimptotică pentru determinarea informației Fisher și obținem

$$I(f_c) = N\int_{-1/2}^{1/2}\frac{f^2}{\sigma_f^4}\frac{e^{-\left(f/\sigma_f\right)^2}}{\left[e^{-\left(f/\sigma_f\right)^2}+\sigma^2\right]^2}df; \quad N\to\infty$$

Dacă raportul semnal/zgomot este suficient de mare, expresia se poate încă simplifica

$$I(f_c) \cong N\int_{-1/2}^{1/2}\frac{f^2}{\sigma_f^4}df = \frac{N}{12\sigma_f^2}; \quad N\to\infty$$

Putem concluziona că, pentru N suficient de mare, dispersia estimatorului pentru frecvența (digitală) purtătoare satisface inegalitatea

$$Disp\left\{\hat{f}_c\right\} \geq \frac{12\sigma_f^2}{N} = \text{CRLB}; \quad N\to\infty$$

40