Lucrarea nr. 5

Modelarea matematică a sistemelor de transmisiuni în banda de bază fără interferență intersimbol

Scopul lucrării: se urmăreşte familiarizarea studenților cu problematica modelării matematice a unor fenomene şi sisteme fizice. Se are în vedere o modelare pe calculator a unui sistem de transmisiuni de date în bandă de bază, modelare ce presupune o prelucrare ***numerică***, (în timp discret), în timp ce "modelul" matematic stabilit este o funcție de variabile ***continue***.

1. Modelarea sistemelor de transmisiuni în banda de bază. Teorema lui Nyquist

Prin transmisiune în banda de bază înțelegem acea transmisiune care utilizează porțiunea din apropierea frecvenței zero din banda de frecvență a canalului. Semnalele în banda de bază, impulsuri dreptunghiulare, au un spectru de frecvențe care ocupă, teoretic, o bandă infinită. Însă banda de frecvențe utilizabilă la o transmisie de date este limitată atât datorită canalului cât şi din considerente econommice. În figura 1. se prezintă schema bloc a unui sistem de transmisiuni în banda de bază:

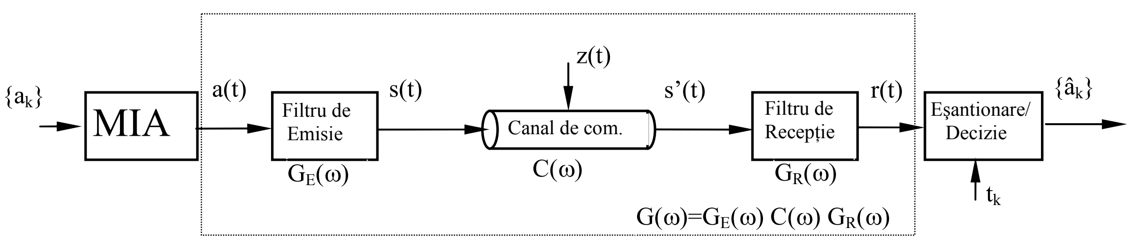


Figura 1. Schema bloc a unui sistem de transmisiuni în banda de bază

Informația ce trebuie transmisă este conținută în succesiunea de impulsuri modulate în amplitudine, *a(t)*, de secvența de date de la intrarea sistemului $\{a_k\}$. Amplitudinile posibile sunt $\pm d, \pm 3d, ..., \pm(L-1)d$, L fiind *2* pentru semnale binare. La emisie şi recepție se utilizează filtrele cu funcțiile de transfer $G_E(\omega)$ şi respectiv $G_R(\omega)$. Semnalul recepționat *r(t)* este prelucrat de către receptor pentru a se stabili amplitudinea sa şi, în consecință, simbolul ce a fost emis.

$C(\omega)$ este funcția de transfer a canalului ideal. Răspunsul în frecvență al întregului lanț de transmisiuni (emițător-canal-receptor), $G(\omega)$, este:

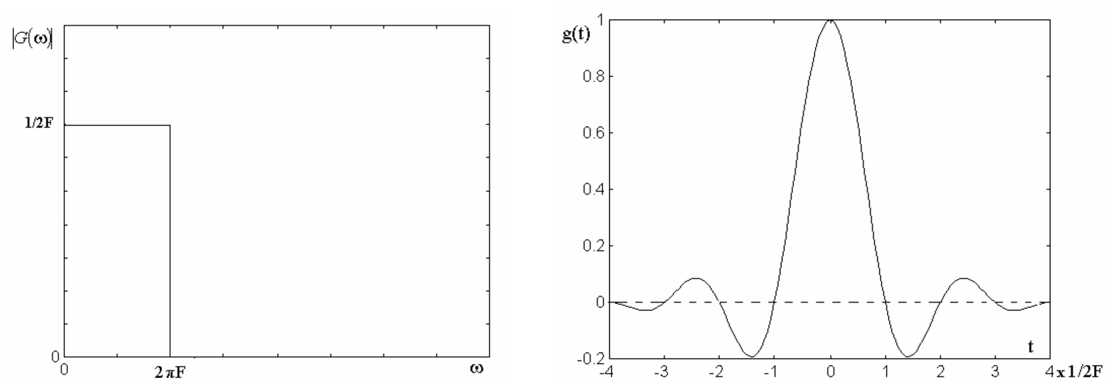
$$G(\omega) = G_E(\omega) \cdot C(\omega) \cdot G_R(\omega) \quad (1.1)$$

numit şi răspunsul în frecvență al canalului echivalent.

Deorece banda de frecvențe utilizabilă la o transmisie de date este limitată, rezultă că acest răspuns în frecvență al canalului echivalent trebuie să fie o funcție de bandă limitată, ce impune însă şi o limită maximă a vitezei de transfer a datelor.

Teorema lui Nyquist afirmă că într-un canal echivalent cu un *filtru trece-jos ideal*, cu frecvența de tăiere ***F***, este posibilă transmiterea semnalelor binare independente, cu o viteză de semnalizare mai mică decât ***2F*** simboluri/secundă, fără interferență între simboluri.

Figura 2.a prezintă funcția de transfer de tip "*filtru trece-jos ideal*" (cu fază nulă), $G(\omega)$, în timp ce figura 2.b reprezintă răspunsul la impuls, $g(t)$, corespunzător.



a) **b)**

Figura 2. a) Răspunsul în frecvență al filtrului trece-jos ideal; b) Răspunsul la impuls corespunzător

Expresiile analitice ale celor două funcții sunt:

$$G(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2F} & |\omega| \le \omega_0 = 2\pi F \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}, \qquad g(t) = \frac{sin(2\pi F t)}{2\pi F t} = sinc(\omega_0 t) \quad (1.2)$$

Considerând o succesiune de impulsuri pe linie, decalate în timp cu durata ***T***, condiția de interferență nulă între simboluri se poate scrie sub forma:

$$T = k \cdot \frac{1}{2F}, \quad \forall k \in \aleph^* \quad (1.3)$$

din care rezultă viteza de transmitere maximă : $v_{max} = \frac{1}{T_{min}} = 2F.$

Considerând un mesaj *a(t),* ce constă din *N* simboluri consecutive, ce apar la intervale de timp *T*, acesta are expresia:

$$a(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \delta(t - nT) \qquad (1.4)$$

Semnalul recepționat, *r(t),* în cazul unui canal ce nu introduce zgomot peste semnalul util (*z(t)=0*), are expresia:

$$r(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot g(t - nT) \qquad (1.5)$$

Condiția de interferență nulă intersimbol presupune ca eşantionul $r_k = r(kT)$, să fie dependent doar de simbolul a_k şi nu şi de simbolurile $a_n, \quad n \neq k$. Notând $g_k = g(kT)$, eşantionele funcției răspuns la impuls *g(t)*, condiția de mai sus se verifică pentru:

$$g_{n-k} = 0, \qquad \forall n \neq k \qquad (1.6)$$

Se observă, analizând relația (1.2), că în condițiile din relația (1.3), se verifică întotdeauna condiția de interferență nulă intersimbol din ec. (1.6).

2 Simularea pe calculator a trecerii unei secvențe de date printr-un canal echivalent de tip "trece-jos ideal"

Pentru a putea realiza o simulare a transmisiei cu ajutorul calculatorului, plecând de la filtrul global de tip "trece-jos ideal", trebuie să găsim un model matematic *discretizat* (în timp discret), echivalent cu modelul în timp continuu stabilit. În acest scop vom utiliza metoda invarianței răspunsului la impuls.

2.1 Metoda de echivalare a sistemelor în timp continuu cu sisteme în timp discret prin invarianța răspunsului la impuls

Metoda presupune considerarea ca şi răspuns la impuls al sistemului discret echivalent secvența $g_d[n] = g(nT_e)$, obținută prin eşantionarea răspunsului la impuls *g(t)* al sistemului în timp continuu, cu un pas de eşantionare T_e, ce verifică teorema eşantionării. În aceste condiții Transformata

Fourier în Timp Discret, (TFTD), a secvenței $g_d[n]$, $G_d(\Omega)$, se exprimă în funcție de răspunsul în frecvență $G(\omega)$ conform:

$$G_d(\Omega)\Big|_{\Omega=\omega\cdot T_e} = \frac{1}{T_e}\sum_{k\in Z} G\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_e}\right) \tag{2.1}$$

Ea este o funcție periodică în Ω, cu perioada 2π.

2.2 Răspunsul unui sistem în timp discret la o secvență de intrare $x[n]$

Notând cu $y[n]$, secvența de la ieşirea unui sistem în timp discret, cu răspunsul la impulsul unitate, $\delta[n]$, dat de secvența $g_d[n]$, la o secvență de intrare $x[n]$, dacă sistemul este liniar şi invariant în timp, avem:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot g[n-k] \tag{2.2}$$

ceea ce reprezintă o sumă infinită de termeni. Însă, în general, avem de-a face cu semnale de durată finită, caz în care indicele *k* din ecuația (2.2) ia valori dintr-un interval finit.

O cale mai rapidă de calcul a valorilor secvenței $y[n]$ este oferită de utilizarea algoritmului Transformatei Fourier Rapide (notat TFR sau FFT-Fast Fourier Transform), algoritm ce presupune un număr minim de operații necesare. De fapt, aplicâd TFTD, ecuației (2.2) rezultă:

$$Y(\Omega) = G_d(\Omega)\cdot X(\Omega) \tag{2.3}$$

unde $Y(\Omega)$ şi $X(\Omega)$ reprezintă TFTD a secvențelor $y[n]$şi respectiv $x[n]$.

Algoritmul TFR permite calculul rapid a valorilor $Y(\Omega_k)$ cu $\Omega_k = k\cdot {}^{2\pi}\!/_{M}$, unde *M* este de obicei o putere a lui *2*. Calculul rapid a acestor valori se face conform:

$$Y(\Omega_k) = G_d(\Omega_k)\cdot X(\Omega_k), \tag{2.4}$$

deci utilzând eşantioane ale spectrelor secvențelor $g_d[n]$ şi $x[n]$.

Aplicând Transformarea Fourier Rapidă Inversă, (TFRI sau IFFT), secvenței de valori spectrale $Y(\Omega_k)$ se obține secvența răspuns, $y[n]$.

2.3 Generarea cu calculatorul a unei secvențe de date aleatoare

Avem în vedere simularea comportării unui sistem în timp continuu, caracterizat prin funcția răspuns în frecvență şi răspunsul la impuls date de ec. (2). Această analiză presupune o secvență de date de intrare de forma dată de ec. (4). Ne vom rezuma doar la o transmisie binară (deci cu doar două nivele posibile ale semnalului de date), unipolară, (nivele normalizate *0* şi *1* pentru *0* şi respectiv *1* logic), şi bipolară, (nivele normalizate -1 şi 1 pentru 0 şi respectiv 1 logic). În acest scop vom găsi sistemul discret echivalent al sistemului considerat, generând şi o versiune discretă a semnalului de intrare *a(t)*.

Am văzut, §2.1, că echivalarea sistemelor are la bază o eşantionare cu o perioadă T_e a unui semnal în timp continuu. O procedură similară se aplică şi semnalelor de intrare/ieşire. Astfel, căutăm semnalul în timp discret $a_d[n] = a(nT_e)$, semnal ce se aduce la intrare sistemului discret echivalent. Ținând cont de structura particulară a semnalului de intrare *a(t)*, şi anume *N* simboluri binare de durată *T*, alegem perioada T_e astfel încât să nu rezulte "pierdere sau denaturare de informație" (scăpare de bit sau sondarea diferiților biți în număr diferit de puncte). Acest lucru se asigură alegând raportul $T/T_e = L_b$ un număr întreg, de obicei o putere întreagă a lui *2*. Considerând un număr *N* de biți, tot o putere întreagă a lui *2* rezultă o lungime totală a secvenței numerice, $M = N \cdot L_b$, o putere întreagă a lui *2*.

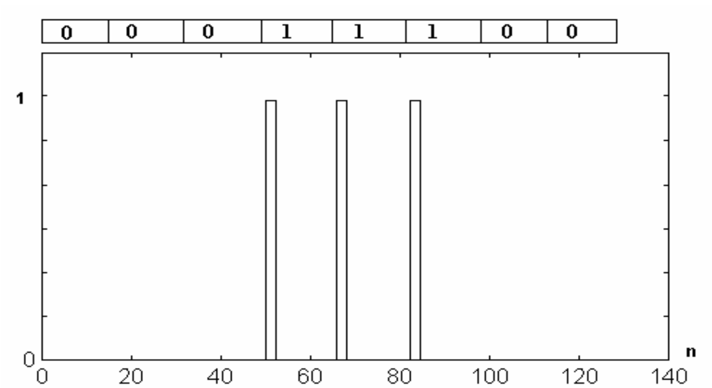


Figura 3. O secvență de impulsuri unipolare

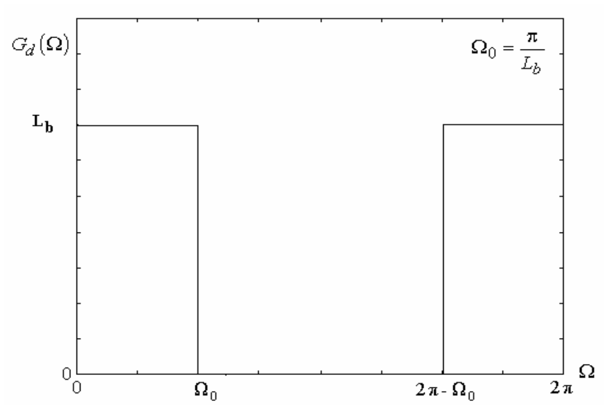
Se obține astfel o secvență numerică $a_d[n]$ în care apare o valoare de bit la intervale de timp egale cu L_b.

Dacă această valoare (*0* sau *1* in cazul unipolar şi *-1* sau *1* în cazul bipolar) se generează în mod aleator, (prin pe utilizarea unori funcții ce generează valori aleatoare), obținem o secvență de date de *N* simboluri succesive aleatoare. Un exemplu de o astfel de secvență se prezintă în figura 3, unde s-a considerat un număr de $N=8$ simboluri binare unipolare, cu $L_b = 2^4 = 16$, rezultând $M=128$, (lungimea totală a secvenței numerice $a_d[n]$).

2.4 Răspunsul în frecvență al sistemului discret echivalent tip "filtru trece-jos ideal"

Acesta are la bază ecuația (1.7), rezultând o funcție periodică, cu perioada $2\cdot\pi$ în variabila Ω. Pulsația de tăiere a filtrului în timp continuu fiind $\pi/T = 2\pi\cdot F$ (vezi fig. 2.a), teorema de eșantionare impune verificarea condiției $T/T_e \geq 1$. Astfel, se justifică o alegere de forma $T/T_e = L_b = 2^l,\ \ l \geq 0.$ Expresia răspunsului în frecvență al sistemului discret echivalent este:

$$G_d(\Omega) = \begin{cases} L_b & |\Omega| \leq \dfrac{\pi}{L_b} \\ 0 & \dfrac{\pi}{L_b} < |\Omega| \leq \pi \end{cases}, \quad G_d(\Omega) = G_d(\Omega + 2\pi) \qquad (2.5)$$



Această funcție, reprezentată în figura 4, corespunde unui filtru trece-jos ideal în timp discret, cu pulsația de tăiere $\Omega_0 = \omega_0 \cdot T_e$, ce, ținând cont de ec. (1.3), rezultă a fi:

$$\Omega_0 = 2\pi\cdot F\cdot T_e = \pi\frac{T_e}{T} = \frac{\pi}{L_b} \qquad (2.6)$$

Figura 4. Răspunsul în frecvență al sistemului discret echivalent

De fapt, la simulare se lucrează cu o formă "discretizată" a acestei funcții obținută prin eșantionarea uniformă, în punctele $\Omega_k = k\cdot {2\pi}/{M}$, a funcției $G_d(\Omega)$, rezultând o secvență numerică $G_d[k] = G_d(\Omega_k)$ de lungime M (de obicei putere a lui *2*).

2.5 Secvența de la ieşirea sistemului numeric şi interpretarea acesteia

La intrarea sistemului numeric echivalent, cu funcția de transfer dată de ec. (1.11), se aduce secvența numerică $a_d[n]$, de lungime $M = N \cdot L_b = 2^m$, obținută în §2.3. Secvența numerică de la ieşirea filtrului trece-jos ideal numeric, $r_d[n]$, se obține conform procedurii descrise în secțiunea 2.2, utilizând algoritmul FFT (*Fast Fourier Transform* - Transformarea Fourier Rapidă). Această transformată se calculează tot în *M* puncte. Secvența $r_d[n]$ obținută va fi şi ea o secvență numerică de lungime *M.* Pentru exemplul considerat în secțiunile anterioare, caracterizat prin $N = 8$ şi $L_b = 16$, secvența răspuns are forma din figura 5.

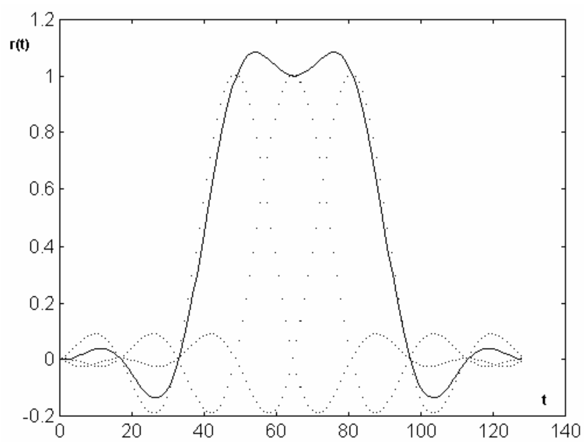


Figura 5. Răspunsul filtrului numeric la semnalul de intrare din figura 3.

Ultima fază a simulării constă în luarea deciziilor asupra biților $\{a_k\}$ transmişi. Acest lucru se face "eşantionând" semnalul de la ieşirea filtrului, deci secvența $r_d[n]$, în momentele de timp $n_k = k\dfrac{T}{T_e} = k \cdot L_b$. Comparând valorile $r_d[n_k]$ cu o valoare de prag, (*1/2* în cazul unei transmisii binare unipolare şi *0* în cazul unei transmisii bipolare), se decide asupra simbolurilor $\{a_k\}$ transmise.

3 Simularea pe calculator a trecerii unei secvențe de date printr-un canal echivalent de tip "cosinus-ridicat" şi "cosinus pătrat"

Modelul matematic al unui sistem de transmisiuni de tip "*filtrul trece-jos ideal*" nu este singurul posibil ce permite transmiterea de date fără interferență intersimbol şi, în plus, prezintă şi dezavantajul major că, de regulă, implică filtre de emisie şi/sau recepție ce nu sunt fizic realizabile (deseori funcțiile sistem ce rezultă corespund unor sisteme necauzale). Din acest motiv sistemele de transmisiuni de date în banda de bază ce permit o semnalizare fără interferență intersimbol sunt modelate prin alte caracteristici globale. O familie de astfel de modele este cunoscută sub numele de “*filtre de tip cosinus ridicat*”. Răspunsul în frecvență al sistemului echivalent are expresia:

$$G(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{\omega_0}=T & |\omega|\le\omega_0\cdot(1-\alpha)\\ \dfrac{\pi}{2\omega_0}\cdot\left[1-sin\left(\dfrac{\pi\omega}{2\alpha\omega_0}-\dfrac{\pi}{2\alpha}\right)\right] & \omega_0\cdot(1-\alpha)\le|\omega|\le\omega_0\cdot(1+\alpha)\\ 0 & |\omega|>\omega_0\cdot(1+\alpha)\end{cases} \quad (3.1)$$

unde α este un parametru variabil între *0* şi *1*, denumit şi exces de bandă. Funcția răspuns la impuls corespunzătoare, *g(t)*, este:

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{sin\dfrac{\pi t}{T}}{\dfrac{\pi t}{T}}\cdot\frac{cos\dfrac{\alpha\pi t}{T}}{1-\left(\dfrac{2\alpha t}{T}\right)^2} \quad (3.2)$$

ce verifică condiția de interferență nulă intersimbol:

$$g((n-k)T)=0,\quad \forall n\ne k \quad (3.3)$$

În figura 1 se prezintă funcția răspuns în frecvență $G(\omega)$ pentru $\alpha=0.5$.

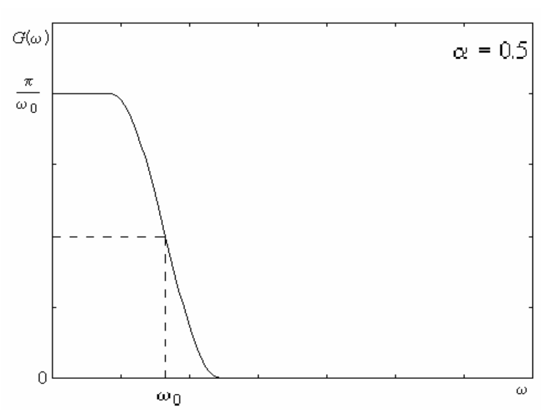


Figura 1. Răspunsul în frecvență al unui filtru de tip “cosinus-ridicat”

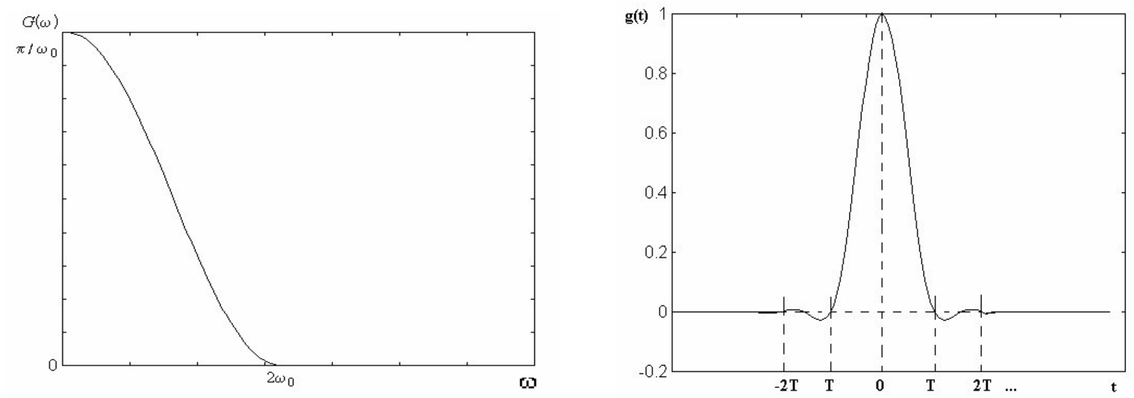
Alegând $\alpha=1$ se obține funcția de transfer global ce poartă numele de “*filtru de tip cosinus pătrat*”. Relația (3.2) devine:

$$G(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{\omega_0}cos^2\dfrac{\pi\omega}{4\omega_0} & |\omega|\le 2\omega_0\\ 0 & |\omega|>2\omega_0\end{cases} \quad (3.5)$$

Funcția răspuns la impuls are expresia:

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{sin\dfrac{\pi t}{T}}{\dfrac{\pi t}{T}}\cdot\frac{cos\dfrac{\pi t}{T}}{1-\left(\dfrac{2t}{T}\right)^2} \quad (3.6)$$

ce verifică deasemenea condiția de interferență nulă intersimbol, ec. (3.4).
Figura 2.a prezintă funcția răspuns în frecvență, $G(\omega)$ (ec. (3.5)), în timp ce figura 2.b prezintă funția răspuns la impuls corespunzător, $g(t)$ (ec. (3.6)).



a) **b)**

Figura 2. a) Răspunsul în frecvență al filtrului "cosinus-pătrat"; b) Răspunsul la impuls corespunzător

3.1. Procedura de simulare a lanțului de transmisiuni în banda de bază

Procedura de simulare implică:

3.1.1. Discretizarea semnalului de intrare $a(t)$, prin eşantionare cu pasul T_e. Se obține astfel o secvență numerică $a_d[n] = a(nT_e)$, unde se alege $T/T_e = L_b = 2^l, l > 0,$, rezultând o lungime totală $M = N \cdot L_b$ a secvenței. Alegând numărul de simboluri de transmis N ca fiind o putere întreagă a lui *2,* va rezulta o lungime totală a secvenței, *M,* tot o putere întreagă a lui *2.*

3.1.2. Echivalarea sistemului în timp continuu cu un sistem în timp discret pe baza metodei de echivalare prin invarianța răspunsului la impuls. Se găseşte răspunsul în frecvență al sistemului numeric echivalent, $G_d(\Omega)$, funcție ce, în condițiile $T/T_e = L_b = 2^l, l > 0$ (ce respectă teorema eşantionării), va avea expresia:

$$G_d(\Omega) = \begin{cases} L_b \cdot cos^2 \dfrac{L_b\Omega}{4} & |\Omega| \leq \dfrac{2\pi}{L_b} = \Omega_0 \\ 0 & \Omega_0 < |\Omega| < \pi \end{cases}, \quad G_d(\Omega) = G_d(\Omega + 2\pi) \quad (3.7)$$

Se observă că aceasta este o funcție de o variabilă continuă. În vederea reprezentării pe calculator a acestei funcții ea se discretizează, eşantionând uniform în punctele frecvențiale $\Omega_k = k \cdot {}^{2\pi}\!/_{M}$, rezultând o secveță numerică $G_d[k] = G_d(\Omega_k)$ periodică, cu perioada *M* (o putere întreagă a lui *2*). Fiind o secvență periodică, memorarea ei implică reținerea doar a *M* valori succesive, (o perioadă), ale secvenței.

3.1.3. Se găseşte secvența răspuns, $r_d[n]$, de la ieşirea filtrului de recepție. Ținând cont de faptul că, prin ipoteză, canalul nu introduce zgomot peste semnalul util, aceasta se calculează în domeniul Fourier, prin:

- găsirea secvenței $A_d[k] = FFT(a_d[n])$, calculată în *M* puncte, ce nu reprezintă altceva decât secvența eşantioanelor $A_d(\Omega_k)$, $\Omega_k = k \cdot {}^{2\pi}\!/_{M}$, ale Transformatei Fourier în Timp Discret (TFTD) a secvenței numerice $a_d[n]$, $A_d(\Omega)$;
- calculul produsului $R_d[k] = A_d[k] \cdot G_d[k]$, tot în *M* puncte;
- calculul secvenței $r_d[n] = IFFT(R_d[k])$.

3.1.4. Găsirea eşantioanelor $r_k = r_d[n_k]$, cu $n_k = k \cdot L_b$, ce corespunde eşantionării semnalului în timp continuu, $r(t)$, de la ieşirea filtrului de recepție din figura 1, în momentele de timp $t_k = kT$ (de fapt $n_k = t_k / T_e$). Eşantionarea se poate face înmulțind secvența $r_d[n]$, cu o secvență de "eşantionare", $p[n]$, de forma:

$$p[n] = \begin{cases} 1 & n \vdots L_b \\ 0 & in \quad rest \end{cases} \tag{3.8}$$

3.1.5 Luarea deciziilor asupra simbolurilor a_k transmise pe baza eşantioane-lor r_k. În acest scop se compară fiecare valoare de eşantion r_k cu un prag *d* (*1/2* în cazul unei secvențe unipolare şi *0* în cazul unei secvențe bipolare), şi se decide simbolul:

$$\hat{a}_k = \begin{cases} 1 & daca \quad r_k \geq d \\ 0 & daca \quad r_k < d \end{cases}$$

4. Transmisii de date prin canale cu perturbații

Modelarea unui sistem de transmisiuni printr-o caracteristică globală de tip "*trece-jos ideal* " sau "*cosinus-ridicat*" cu idealizarea canalului permitea, din punct de vedere matematic, o abordare relativ simplă a sistemului considerat. În realitate, însă, canalul este o componentă esențială a lanțului de transmisiuni, componentă ce, în general, are un comportament ce afectează semnalul util transmis prin el şi, de obicei, este variabil în timp. Acest efect asupra semnalului este de obicei un efect dăunător, ce duce la degradarea calității semnalului transmis şi îngreunarea procesului de recepție. Semnalul transmis printr-un astfel de canal este, în general, atenuat (datorită pierderilor pe cale), întârziat (datorită vitezei de propagare limitate), distorsionat, (datorită diferitelor viteze de grup cu care se propagă diferitele componente spectrale ale semnalului), şi afectat de influența altor semnale, efect ce, de obicei, este unul imprevizibil, având un caracter profund aleator, motiv din care le vom numi zgomote (ce se suprapun peste semnalul util) .

În figura 1 se prezintă structura sistemului de transmisiuni în banda de bază, considerat:

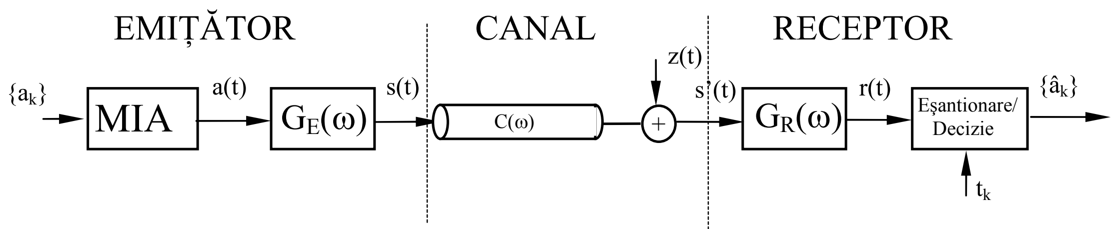


Figura 1. Schema de principiu a unui sistem de transmisiuni în banda de bază

unde :

$$G(\omega) = G_E(\omega) \cdot C(\omega) \cdot G_R(\omega) \tag{4.1}$$

reprezintă răspunsul în frecvență al întregului lanț de transmisiuni emițător-canal-receptor, unde, în mod normal, avem:

$$C(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \tag{4.2}$$

în care $A(\omega)$ pune în evidență o atenuare ponderată a diverselor componente spectrale ale semnalului, iar $\varphi(\omega)$ indică relația de fază ce va exista între aceste componente. O funcție $A(\omega)$ independentă de frecvență denotă o atenuare uniformă, iar o funcție de fază $\varphi(\omega)$ liniară denotă un canal ce nu distorsionează forma semnalului. În schema din figura 1 influența zgomotelor introduse de canal se pune în evidență prin însumarea semnalului de la ieşirea canalului, $s'(t)$, cu un "zgomot", *z(t).* În cele ce urmează vom negija efectele de întârziere şi de distorsionare ale canalului ținând cont doar de zgomotul introdus de el pe care-l vom considera ca fiind unul aditiv, alb şi cu distribuție gaussiană, cu dispersia constantă σ_i. Modelul de sistem este cel de filtru global tip "*cosinus pătrat*", cu fază nulă, cu funcția răspuns în frecvență dată de:

$$G(\omega)=\begin{cases} T\cdot cos^2\dfrac{\omega T}{4} & |\omega|\le\dfrac{2\pi}{T} \\ 0 & |\omega|>\dfrac{2\pi}{T} \end{cases} \tag{4.3}$$

Funcția răspuns la impuls, *g(t)*, corespunzătoare, verifică condiția de interferență nulă intersimbol $g((n-k)T)=0, \quad \forall n\neq k$.

Considerând un mesaj *a(t),* ce constă din *N* simboluri consecutive, ce apar la intervale de timp *T*, acesta are expresia:

$$a(t)=\sum_{n=0}^{N-1}a_n\delta(t-nT) \tag{4.4}$$

Notând cu $g_E(t)$ răspunsul la impuls al filtrului de emisie, la ieşirea acestuia se obține semnalul:

$$s(t)=\sum_{n=0}^{N-1}a_n\cdot g_E(t-nT) \tag{4.5}$$

semnal ce urmează a fi transmis prin canal. Canalul fiind idealizat, deci nu atenuează semnalul, nu-l întârzie sau dispersează, şi ține cont doar de zgomotele ce le introduce, la intrarea filtrului de recepție vom avea semnalul:

$$s'(t)=s(t)+z(t) \tag{4.6}$$

relație ce pune în evidență cele două componente ale unui semnal ce trece printr-un canal zgomotos: componenta de semnal util, *s(t),* şi componenta de zgomot, *z(t).*

Dacă filtrul de recepție este un sistem liniar atunci şi semnalul de la ieşirea acestuia va fi compus din două componente, una de semnal util şi cea de zgomot. Astfel, semnalul recepționat, *r(t),* se poate scrie:

$$r(t)=r_u(t)+z_0(t) \tag{4.7}$$

unde $r_u(t)$ reprezintă componenta de semnal util, deci răspunsul filtrului de recepție la semnalul *s(t),* iar $z_0(t)$ este componenta de zgomot, deci răspunsul filtrului de recepție la zgomotul *z(t)* din canal. Componenta de semnal util are expresia: $r_u(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot g(t - nT)$ (4.8)

Semnalul recepționat *r(t)* este eşantionat, iar pe baza eşantionului $r_k = r(kT)$ se ia decizia asupra simbolului binar a_k transmis. Semnalul recepționat, *r(t)*, este eşantionat la momentele de timp $t_k = kT$, iar pe baza eşantioanelor obținute $r_k = r(t_k)$, se decide asupra simbolului transmis a_k. Cum $r_{uk} = r_u(kT) = a_k$, decizia corectă la recepție presupune ca eşantionul de zgomot $z_{0k} = z_0(kT)$, în modul, să nu depăşească un anumit prag (*1/2* în cazul unei transmisii unipolare şi *0* în cazul unei transmisii bipolare).

Se defineşte *raportul semnal/zgomot*, *RSZ*, la ieşirea filtrului de recepție la momentul t_0 ca fiind:

$$RSZ_0 = \frac{|r_u(t_0)|^2}{P_{z_0}} \tag{4.9}$$

unde P_{z_0} este puterea zgomotului de la ieşirea filtrului de recepție.

În cazul unui zgomot alb gaussian din canal, de putere σ_i^2, puterea zgomotului la ieşirea filtrului de recepție este:

$$P_{z_0} = \sigma_0^2 = \sigma_i^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(\omega)|^2 d\omega \tag{4.10}$$

Semnalul util recepționat, la momentul $t_0 = 0$, se poate scrie:

$$r_u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot G_R(\omega) d\omega \tag{4.11}$$

Se caută filtrul de recepție optim, $G_R(\omega)$, care să maximizeze raportul semnal/zgomot la ieşirea filtrului de recepție la momentul $t_0 = 0$. Acest filtru se găseşte ca fiind unul cu expresia răspunsului în frecvență:

$$G_R(\omega) = k \cdot S^*(\omega) \tag{4.12}$$

deci, filtrul de recepție este adaptat la forma semnalului din canal.

Necunoscând însă, apriori, informația ce se va transmite prin canal, cerința (4.12) este dificil de realizat. O soluție mai puțin pretențioasă, însă doar suboptimală, acceptată în practică ca şi una de compromis, este oferită de condiția de maximizare a raportului semnal/zgomot la ieşirea filtrului de recepție în cazul transmiterii doar a unui singur simbol de informație. Acest lucru presupune:

$$\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_k = 0, \quad \forall k \neq 0 \end{array} \Rightarrow \quad S(\omega) = G_E(\omega) \tag{4.13}$$

ce, ținând cont de ec. (4.12), implică:

$$G_R(\omega) = k \cdot G_E(\omega) \quad \Rightarrow \quad G(\omega) = k \cdot \left|G_E(\omega)\right|^2 \tag{4.14}$$

Condiție satisfăcută, cu *k=1*, de alegerea:

$$\left|G_R(\omega)\right| = \left|G_E(\omega)\right| = \sqrt{\left|G(\omega)\right|} \tag{4.15}$$

Relația (4.15) nu impune nici o restricție deosebită caracteristicii de fază a celor două funcții răspuns în frecvență, $G_E(\omega)$ respectiv $G_R(\omega)$, singura condiție ce trebuie să fie verificată este acea de sumă nulă a celor două faze la orice frecvență. Pentru o funcție $G(\omega)$ reală, cum este şi cazul nostru, putem alege:

$$G_E(\omega) = G_R(\omega) = \sqrt{G(\omega)} \tag{4.16}$$

4.1. Procedura de simulare a lanțului de transmisiuni în banda de bază

4.1.1. Discretizarea semnalului de intrare $a(t)$, prin eşantionare cu pasul T_e. Se obține astfel secvența $a_d[n] = a(nT_e)$. Alegând $T/T_e = L_b = 2^l, l > 0,$, rezultă o lungime totală $M = N \cdot L_b$ a secvenței. Alegând $N = 2^n$, va rezulta o lungime totală a secvenței, *M,* tot o putere întreagă a lui *2.*

4.1.2. Echivalarea filtrelor în timp continuu, dimensionate conform ec. (4.16), cu filtre în timp discret. Echivalarea se face pe baza metodei de echivalare prin invarianța răspunsului la impuls. Se găsesc funcțiile răspuns în frecvență ale filtrelor numerice echivalente, $G_{d_E}(\Omega)$ şi, respectiv $G_{d_R}(\Omega)$, funcții ce, în condițiile $T/T_e = L_b = 2^l, l > 0$ (ce respectă teorema eşantionării), au expresia:

$$G_{d_E}(\Omega) = G_{d_R}(\Omega) = \sqrt{G_d(\Omega)} = \begin{cases} \sqrt{L_b} \cdot cos \dfrac{L_b \Omega}{4} & |\Omega| \leq \dfrac{2\pi}{L_b} = \Omega_0 \\ 0 & \Omega_0 < |\Omega| < \pi \end{cases}, \tag{4.17}$$

$$G_{d_E}(\Omega) = G_{d_E}(\Omega + 2\pi), \quad G_{d_R}(\Omega) = G_{d_R}(\Omega + 2\pi)$$

În vederea reprezentării lor pe calculator funcțiile se discretizează, eşantionând uniform în punctele $\Omega_k = k \cdot {2\pi}/{M}$, rezultând secvețele numerice periodice

$G_{d_E}[k] = G_{d\,E}(\Omega_k)$ şi $G_{d_R}[k] = G_{d\;R}(\Omega_k)$, perioada lor fiind *M* (o putere întreagă a lui *2*). Memorarea lor implică reținerea a doar *M* valori succesive, (o perioadă completă), din fiecare.

4.1.3. Se găseşte secvența $s_d[n]$, de la ieşirea filtrului de emisie. Aceasta se calculează în domeniul Fourier, prin:

- găsirea secvenței $A_d[k] = FFT(a_d[n])$, calculată în *M* puncte, (de fapt se obține secvența eşantioanelor $A_d[k] = A_d(\Omega_k)$, $\Omega_k = k \cdot {}^{2\pi}\!/_{M}$, ale Transformatei Fourier în Timp Discret a secvenței numerice $a_d[n]$, $A_d(\Omega)$);

- calculul produsului $S_d[k] = A_d[k] \cdot G_d[k]$, tot în *M* puncte;

- calculul secvenței $s_d[n] = IFFT(S_d[k])$.

Se obține astfel semnalul ce urmează a fi transmis prin canal, semnal ce trebuie însumat cu zgomotul canalului.

4.1.4. Generarea unei secvențe de zgomot, $z_d[n]$, de putere σ_i^2, ce trebuie însumată cu secvența de semnal util $s_d[n]$, obținând:

$$s'_d[n] = s_d[n] + z_d[n] \tag{4.18}$$

4.1.5. Se găseşte secvența răspuns $r_d[n]$ de la ieşirea filtrului de recepție. Procedura utilizată poate fi una similară celei descrise în §2.3 (prin calcul în domeniu frecvență).

4.1.6. Găsirea eşantioanelor $r_k = r_d[n_k]$, cu $n_k = k \cdot L_b$, ce corespunde eşantionării semnalului în timp continuu, $r(t)$, de la ieşirea filtrului de recepție din fig. 1, în momentele de timp $t_k = kT$ În acest scop se înmulțeşte secvența $r_d[n]$, cu o secvență de "eşantionare", $p[n]$, de forma:

$$p[n] = \begin{cases} 1 & n \vdots L_b \\ 0 & in \quad rest \end{cases} \tag{4.19}$$

4.1.7. Luarea deciziilor asupra simbolurilor a_k transmise pe baza eşantioane-lor r_k. În acest scop se compară fiecare valoare de eşantion r_k cu un prag *d* (*1/2* în cazul unei secvențe unipolare şi *0* în cazul unei secvențe bipolare), şi se decide simbolul:

$$\hat{a}_k = \begin{cases} 1 & daca \quad r_k \ge d \\ 0 & daca \quad r_k < d \end{cases}$$

5. Partea experimentală

5.1 Utilizând un program de calcul ştiinţific (*Mathcad* sau *Matlab*), vizualizaţi graficul funcţiei răspuns în frecvenţă a sistemului în timp discret echivalent, $G_d(\Omega_k)$ cu $\Omega_k = k \cdot 2\pi / M$, în *M=128* puncte, şi considerând $L_b = 16$.

5.2 Aplicând algoritmul TFRI găsiţi şi reprezentaţi grafic funcţia răspuns la impuls, $g_d[n]$, al acestui sistem. Notaţi poziţiile şi valorile maximelor locale ale secvenţei. Diferenţiind secvenţa, apreciaţi viteza de variaţie a semnalului în jurul trecerilor prin zero. Ce se poate constata ?

5.3 Urmărind procedura descrisă în secţiunea 2.3 generaţi o secvenţă aleatoare de date unipolare, $a_d[n]$, de lungime *M=128,* versiunea discretizată a unui semnal *a(t)* de *N=8* simboluri unipolare.

5.4 Găsiţi secvenţa $r_d[n]$ ce se obţine la ieşirea sistemului numeric dacă la intrarea sa se aduce secvenţa $a_d[n]$. În ce domeniu de valori se încadrează valorile $r_d[n]$? Justificaţi.

5.5 Stabiliţi momentele de timp optime de eşantionare, n_k, şi găsiţi secvenţa de biţi obţinuţi după luarea deciziei, $\{\hat{a}_k\}$. Ce se poate constata ? Explicaţi importanţa stabilirii corecte a acestor momente de timp. Ce condiţie impune acest lucru sistemului de transmisiuni implementat ?

5.6 Repetaţi *3.3-3.5* pentru cazul unei secvenţe de date bipolare.

5.7 Creşteţi numărul de biţi din secvenţa de intrare, fără modificarea lui L_b. La ce lungime a secvenţei de intrare vom constata o decizie incorectă la recepţie?

5.8 Utilizând o funcţie de generare de valori aleatoare generaţi o secvenţă de valori aleatoare, $z_d[n]$, de lungime *M=128.* Distribuţia valorilor este gaussiană, cu o dispersie de $\sigma_i = 0.5$. Reprezentaţi secvenţa sumă $s'_d[n] = s_d[n] + z_d[n]$.

5.9 Repetaţi *5.1-5.7* pentru cazul unui semnal de *N=512* simboluri binare aleatore. Modificând valoarea dispersiei zgomotului, schiţaţi grafic evoluţia probabilităţii deciziei incorecte în funcţie raportul semnal/zgomot. Se vor considera valorile $\sigma_i = 0.75, \quad 1, \quad 1.25, \quad 1.5$.