

## 7. TRANSMISIUNI DE DATE IN SISTEME CU MODULATIE DE FAZA

După cum s-a văzut, sistemele cu modulație liniară utilizează banda de frecvență alocată dar, ca urmare a demodulării coerente, necesită echipamente complexe pentru refacerea purtătoarei. Sistemele MFD deși ocupă o bandă mai largă decât sistemele cu modulație liniară, permit demodularea necoherentă. Prin utilizarea modulației de fază se pot îmbina avantajele celor două sisteme. Semnalele cu modulație de fază sînt cunoscute și ca semnale PSK (Phase Shift-Keyed) sau semnale cu modulație cu deplasare de fază, MPD.

Semnalele MPD ocupă o bandă mai îngustă decât semnalele MFD, și necesită o putere de vîrf mai mică decât cele cu modulație liniară cu mai multe niveluri. De asemenea, ele se pot demodula și prin metode necoherente (ca și semnalele MFD), fără o reducere pronunțată a performanțelor. Semnalele MPD au mai multe asemănări cu semnalele MA decât cu semnalele MFD. Modulația de fază cu deplasarea de fază de  $180^\circ$  este similară modulației BLD.

Pentru transmiterea a mai mult de un simbol binar într-un interval Nyquist se utilizează în general sistemele de transmisiuni cu MFD. În mod uzual, numărul stărilor de fază este o putere a lui 2.

### 7.1. Modulația de fază

Se consideră semnalul modulator  $x(t)$  dat de expresia

$$x(t) = \sum_n a_n g(t-nT), \quad (7.1)$$

unde  $g_n$  este impulsul dreptunghiular de durată  $T$  și amplitudine 1 iar  $a_n$  simbolul emis.

Semnalul MPD poate fi reprezentat prin

$$s(t) = U_0 \cos \left[ \omega_0 t + \sum_n \phi_n g(t-nT) \right] \quad (7.2)$$

în care  $\{\phi_n\}$  reprezintă o secvență de faze corespunzătoare secvenței  $\{a_n\}$ . Fazele  $\phi_n$  iau valori discrete din mulțimea  $k2\pi/M$  unde  $M$  reprezintă numărul de valori discrete pe care le poate lua

faza.  $M$  este de obicei o putere a lui 2.

Dezvoltînd cosinusul, relația (7.2) conduce la

$$s(t) = U_0 \cos \omega_0 t \left[ \sum_n g(t-nT) \cos \phi_n \right] + U_0 \sin \omega_0 t \left[ \sum_n g(t-nT) (-\sin \phi_n) \right]. \quad (7.3)$$

Asociînd :

$$\begin{aligned} \cos \phi_n &\rightarrow a_n \\ -\sin \phi_n &\rightarrow b_n, \end{aligned}$$

forma (7.3) se transformă în

$$s(t) = U_0 \cos \omega_0 t \cdot \sum_n a_n g(t-nT) + U_0 \sin \omega_0 t \cdot \sum_n b_n g(t-nT). \quad (7.4)$$

Relația (7.4) arată că deși semnalele MPD provin dintr-o modulație exponențială, pot fi interpretate ca o sumă de semnale modulate liniar; este vorba de suma a două semnale BLD cu purtătoare de aceeași frecvență  $\omega_0$  dar defazate cu  $90^\circ$ .

Ca o concluzie a celor afirmate, densitatea spectrală a semnalelor MPD este direct determinată de transformata Fourier a semnalului dreptunghiular  $g(t)$ .

Generarea unui semnal MPD se poate realiza plecînd de la semnale MA în cuadratură. În cazul a numai două faze,  $0^\circ$  și  $180^\circ$ , problema modulației este simplă, reducîndu-se la o inversare de semn. Pentru obținerea unui semnal cu 4 faze se utilizează modulatorul din figure 7.1. Semnalele binare se transmit grupate două

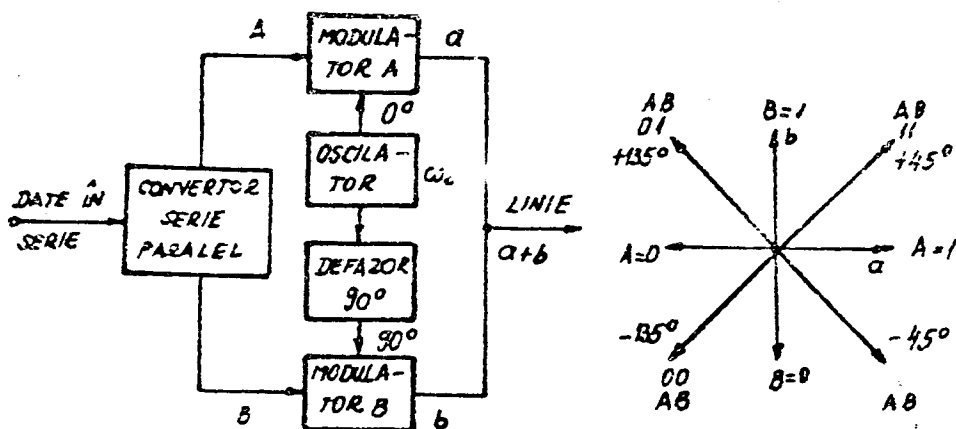


Fig.7.1.

cîte două (în "dibiti"). Convertorul serie paralel grupează tot cîte doi biți, A și B. Cele două semnale binare sînt aplicate simultan modulatorilor liniari de amplitudine. Acestea sînt alimentate de două purtătoare defazate cu  $90^\circ$ .

Ieșirea modulatorului A este semnalul a, cu faza de  $0^\circ$  pentru  $A=1$  și de  $180^\circ$  pentru  $A=0$  iar a modulatorului B este semnalul b cu faza  $+90^\circ$  pentru  $B=1$  și  $-90^\circ$  pentru  $B=0$ .

Cele două semnale a și b sînt însumate și transmise în linie, rezultînd, după cum se vede și din diagrama fazorială prezentată în fig.7.1, un semnal cu fazele de  $+45^\circ$  și  $+135^\circ$ . Defazajul minim între două simboluri este de  $90^\circ$ .

Această metodă poate fi extinsă și pentru generarea unui sistem cu 8 faze. Acesta asigură transmiterea în decursul unui interval Nyquist, a 3 biți (un "tribit").

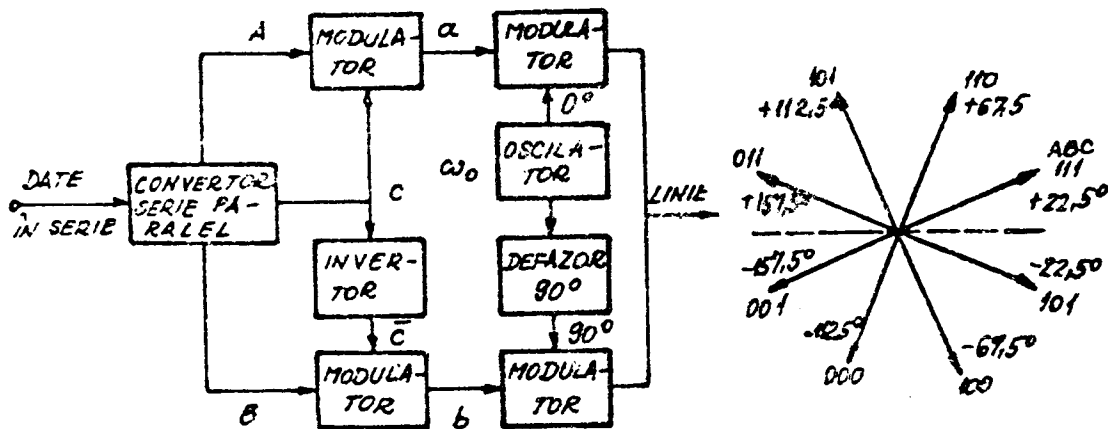


Fig.7.2.

Semnalele de emis se grupează câte 3 prin convertorul serie paralel - figura 7.2 - biții fiind notați A, B și C. Semnalele a și b au câte 4 niveluri, două pozitive, două negative. Astfel, dacă  $C=1$  și  $A=1$  semnalul a are nivelul pozitiv mare iar dacă  $C=0$  și  $A=1$  el are nivelul pozitiv mic. Situația este exact opusă pentru b. Ca urmare a inversării semnalului C, pentru  $C=1$  și  $B=1$  semnalul b are nivelul pozitiv mic iar pentru  $C=0$  și  $B=1$  are nivelul pozitiv mic. Pentru  $A=0$  și  $B=0$ , semnalele a și b vor avea niveluri negative, comandate ca mărime de C.

Semnalele cu 4 niveluri a și b sînt utilizate pentru modularea a două purtătoare în cuadratură, ca și în cazul prezentat în figura 7.1. Se obține, prin însumare, un semnal de linie cu 8 faze, după cum se vede și din diagrama fazorială prezentată în figura 7.2. Două semnale adiacente vor fi separate printr-o fază de  $45^\circ$ .

Semnalele cu modulație de fază produsă de schemele prezen-

tate nu au amplitudinea constantă, motiv pentru care, pe lângă modulația de fază apare și o modulație de amplitudine parazită.

Un alt procedeu de generare a unui semnal cu modulație de fază utilizează rețele de defazare și circuite logice ce selectează semnalul de fază dorită, conform combinației binare de transmis.

Se pot obține semnale cu fază variabilă și prin divizarea frecvenței unui semnal. Acesta trebuie să aibă frecvența de  $M$  ori mai mare decât a purtătoarei, dacă  $2\pi/M$  este pasul de fază dorit.

Modulația cu deplasare de fază mai des utilizată în transmisiunile de date este aceea în care informația este purtată nu de valoarea absolută a fazei ci de tranziția ei. Acestea sunt sisteme cu modulație diferențială de fază DMPD. Ele permit utilizarea unor metode de demodulare necoherente fără a complica decodificatorul.

## 7.2. Demodulația semnalelor MPD

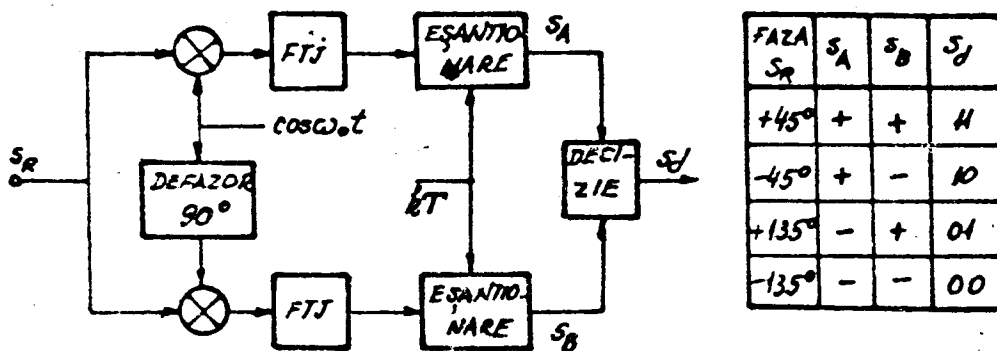
Demodularea semnalelor MPD se realizează utilizând fie demodulatoare coerente fie demodulatoare autocorelative (pătratic).

Deteția coerentă constă în compararea fazei semnalului recepționat cu faza unui semnal de referință, generat la recepție și sinfazat cu purtătoarea de la emisie. Acest tip de detecție este optim din punct de vedere al probabilității recepției corecte.

Deteția coerentă poate fi aplicată numai în cazul transmisiunii prin canale ce nu introduc variații mari de fază. Multe dintre canalele de comunicație nu sunt potrivite pentru o astfel de detecție, deoarece pe termen lung variațiile de fază introduse sunt mari. Se poate considera însă că pe durata transmiterii unui simbol variațiile de fază introduse de canal sunt neglijabile. Acesta este motivul pentru care se preferă modulația diferențială DMPD. Detectoarele, și ele diferențiale în cazul modulației diferențiale, determină schimbarea fazei semnalului recepționat pentru două simboluri vecine, fără ca să fie cunoscută valoarea absolută a fazei.

Un detector coerent pentru un semnal cu 4 faze posibile se prezintă în figura 7.3. Semnalul de referință este refăcut și sinfazat după una din metodele prezentate în capitolul 5. Față de acesta, semnalul recepționat poate avea fazele  $\pm 45^\circ$  și  $\pm 135^\circ$ . Du-

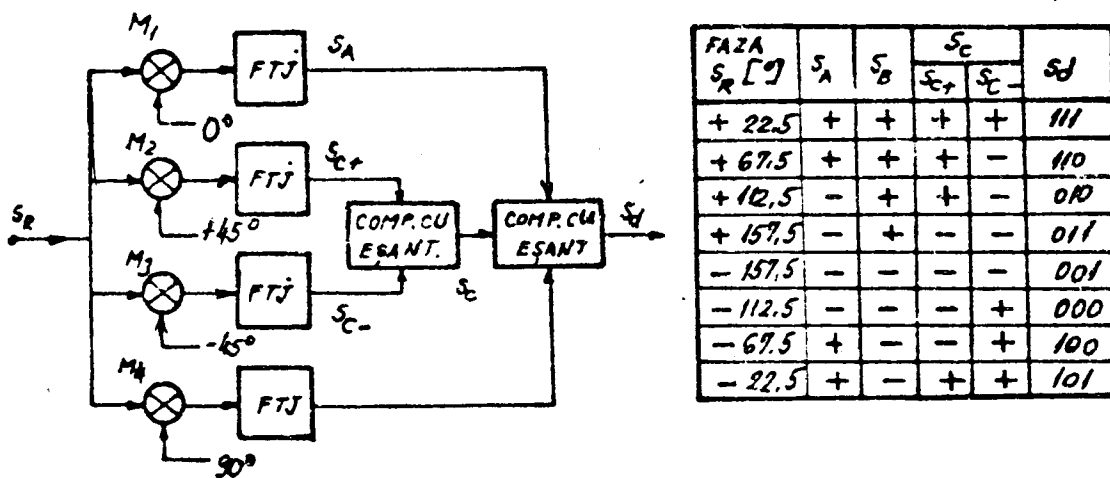
pă demodulatoarele de produs se obțin semnale ce se filtrează și se eșantionează la momente determinate de sincronizarea de bit. Conform semnelor eșantioanelor  $s_A$  și  $s_B$  se ia decizia asupra grupului de 2 biți recepționați, după cum se arată în tabelul din figura 7.3.



FAZA $s_R$	$s_A$	$s_B$	$s_J$
+45°	+	+	11
-45°	+	-	10
+135°	-	+	01
-135°	-	-	00

Fig.7.3.

Se putea utiliza un singur detector de fază. Semnalul de la ieșirea se este proporțional cu cosinusul unghiului de defazaj dintre semnalul incident și cel de referință. Un filtru trece jos și un circuit de eșantionare urmat de un comparator multinivel permit luarea deciziei asupra semnalului recepționat.



FAZA $s_R$ [°]	$s_A$	$s_B$	$s_C$		$s_J$
			$s_{C+}$	$s_{C-}$	
+ 22.5	+	+	+	+	111
+ 67.5	+	+	+	-	110
+ 112.5	-	+	+	-	010
+ 157.5	-	+	-	-	011
- 157.5	-	-	-	-	001
- 112.5	-	-	-	+	000
- 67.5	+	-	-	+	100
- 22.5	+	-	+	+	101

Fig.7.4.

Schema de detecție pentru un sistem cu 8 faze se poate urmări în figura 7.4. Semnalul recepționat se aplică modulatorilor. La modulatorii  $M_2$  și  $M_3$  se aduce semnalul de referință defazat cu +45° respectiv -45°. Semnalele  $s_{C+}$  și  $s_{C-}$  se eșantionează pentru a determina simbolul binar C. Dacă semnalele eșantioanelor coincid, simbolul binar C recepționat este 1 iar dacă semnalele sînt opuse, C=0.

Semnalele  $s_A$  și  $s_E$  servesc la luarea deciziei asupra grupului AB de biți recepționați.

În ambele detectoare prezentate - figurile 7.3 și 7.4 - deciziile se iau numai pe baza polarității eșantioanelor prelevate din semnalul recepționat și prelucrat și nu pe baza mărimii acestor eșantioane, ceea ce reprezintă un avantaj.

Dintre detectoarele diferențiale face parte cel cu schema din figura 7.5. Este un detector diferențial pentru semnale binare cu modulație DMPD.

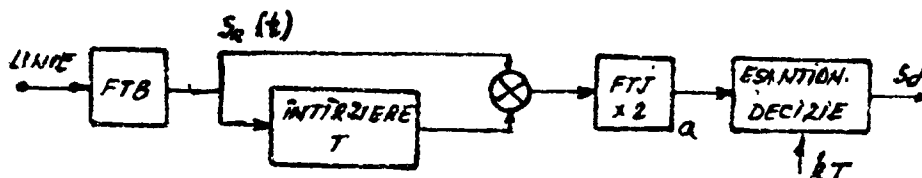


Fig.7.5.

Deoarece pentru două simboluri de același tip nu apare modificare de fază, la emisie se codează secvența binară după regula

$$b_n = \bar{a}_n \oplus b_{n-1} \quad (7.4)$$

unde  $b_0$  este arbitrar iar  $\{a_n\}$  este secvența ce trebuie transmisă (cea efectiv emisă este  $\{b_n\}$ ). Dacă  $b_n=0$  se emite, spre exemplu, semnalul  $U_0 \cos \omega_0 t$  ( $\varphi_n=0$ ) iar dacă  $b_n=1$ , se emite semnalul  $U_0 \cos(\omega_0 t + \pi) = -U_0 \cos \omega_0 t$  ( $\varphi_n = \pi$ ).

Detectorul de la recepție primește după filtrul trece bandă semnalul

$$s_{Rn}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_n); \quad (n-1)T \leq t \leq nT. \quad (7.5)$$

Acest semnal se înmulțește cu semnalul anterior recepționat și întârziat cu  $T$ , durata unui simbol. Dacă filtrul trece jos elimină armonica a doua se obține la ieșirea sa semnalul

$$a = U_0 \cos(\varphi_n - \varphi_{n-1}). \quad (7.6)$$

Dacă  $b_n \neq b_{n-1}$  deci  $b_n \oplus b_{n-1} = 1$ ,  $\varphi_n \neq \varphi_{n-1}$  iar  $a$  este  $-U_0$ ; dacă însă  $b_n = b_{n-1}$ , sau  $b_n \oplus b_{n-1} = 0$ ,  $\varphi_n = \varphi_{n-1}$  iar  $a$  devine  $U_0$ .

Relația (7.4) indică pentru  $a_n$  expresia

$$a_n = \overline{b_n \oplus b_{n-1}} \quad (7.7)$$

și deci, dacă  $a$  este  $-U_0$  se ia decizia  $a_n = 1$  iar dacă  $a$  este  $+U_0$  se ia decizia  $a_n = 0$ .

Un detector diferențial pentru un sistem cu 4 faze, împreună cu tabelul pe baza căruia se iau deciziile, este arătat în figura 7.6.

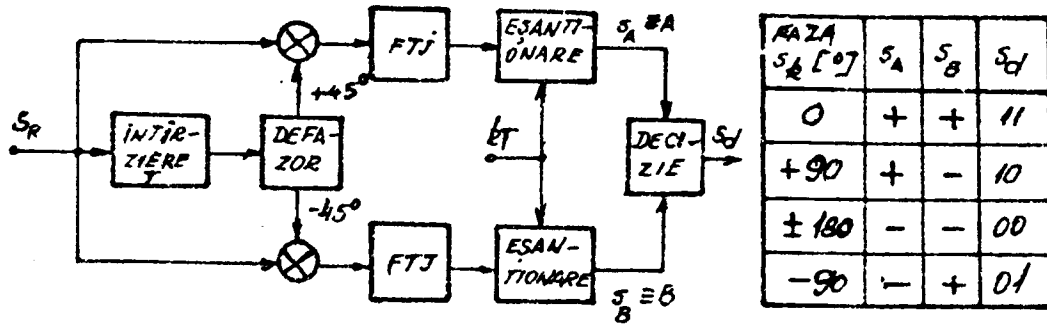


Fig.7.6.

Pentru ca întotdeauna să aibe loc o modificare de fază se utilizează defazarea cu  $\pm 45^\circ$ , deși în principiu este posibil să aplicăm unuia dintre modulatoarele semnalul întârziat iar celuilalt semnalul întârziat și defazat cu  $90^\circ$ .

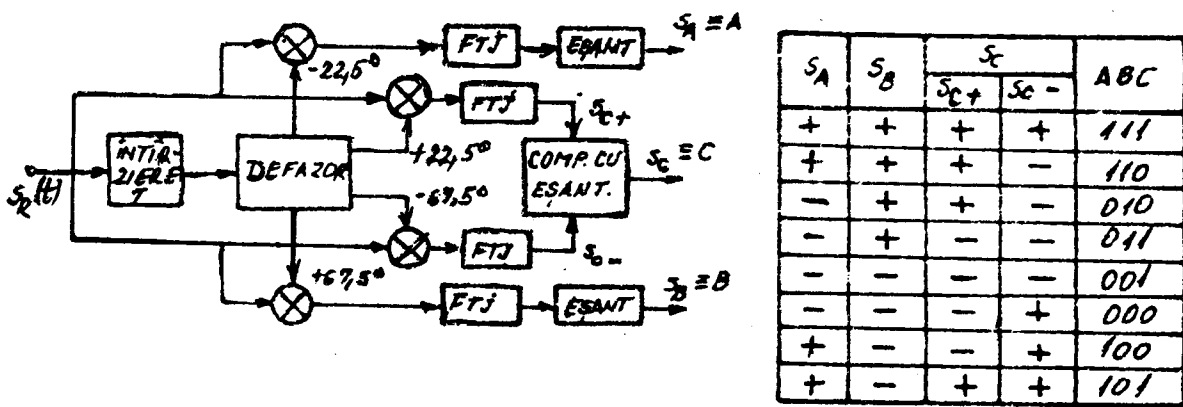


Fig.7.7.

În cazul sistemului cu 8 faze, schema este indicată în figura 7.7. În afara defazajelor din figură, se pot utiliza defazajele de  $0^\circ$ ,  $+90^\circ$ ,  $+45^\circ$  și  $-45^\circ$  dacă sistemul la emisie schimbă fazele cu  $\pm 22,5^\circ$ ,  $\pm 67,5^\circ$ ,  $\pm 112,5^\circ$  și  $\pm 157,5^\circ$ .

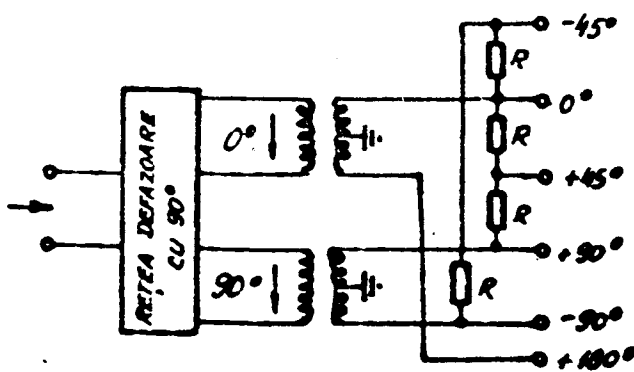


Fig.7.8.

Pentru obținerea unor semnale defazate se pot utiliza scheme ca cea din figura 7.8. Utilizând o rețea de defazare cu  $90^\circ$  și două transformatoare cu priză mediană, se pot obține defazajele de  $\pm 45^\circ$ ,  $\pm 90^\circ$  și  $\pm 180^\circ$ .

În schemele detectoarelor diferențiale de fază există un bloc de întârziere

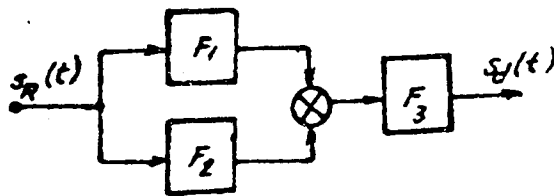


Fig.7.9.

fixă,  $T$ . Acesta poate fi realizat și cu ajutorul unor filtre liniare care aproximează linia de întârziere. Se ajunge astfel la detectorul pătratic, cu schema din figura 7.9, [41].

### 7.3. Erori în sistemele de transmisii cu modulație de fază

Vom considera, pentru început, detectorul coerent cu ieșirea dependentă atât de diferența de fază cât și de amplitudine. La intrarea detectorului coerent semnalul filtrat pentru înlăturarea diafoniilor și zgomotelor suplimentare este  $s_R(t)$ , dat de relația

$$s_R(t) = [u(t)+v(t)] \cos \omega_0 t - w(t) \sin \omega_0 t, \quad (7.8)$$

unde  $u(t)$  este  $U_0$  pentru simbolul 1 și  $-U_0$  pentru simbolul 0 (fază  $0^\circ$  respectiv  $180^\circ$ ) iar  $v(t)$  și  $w(t)$  sînt componentele de joasă frecvență, în cuadratură, ale zgomotului aditiv.

Semnalul de referință local este  $\cos \omega_0 t$ , astfel că după înmulțire și filtrarea trece jos rămîne, cu excepția unui factor de amplificare,

$$s_d(t) = u(t)+v(t). \quad (7.9)$$

Decizia se ia conform semnelui eșantionului prelevat din  $s_d(t)$ . Se consideră sincronizarea de bit perfectă și nu se iau în seamă interferențele între simboluri. Astfel, dacă s-a recepționat simbolul 1,

$$s_d(kT) = U_0 + v(kT) \quad (7.10)$$

și apare eroare atunci cînd  $s_d(kT)$  este negativ.

$$P_e = P\{U_0 + v(kT) < 0\} = P\{v(kT) < -U_0\}. \quad (7.11)$$

Repartiția variabilei aleatoare  $v(t)$  este normală și deci

$$P_e = P\{v(kT) < -U_0\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{U_0^2}{2P_2}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\sqrt{\Gamma}. \quad (7.12)$$

Tinînd seama de dezvoltarea asimptotică pentru  $\operatorname{erfc} x$ , probabilitatea de eroare se poate scrie, pentru rapoarte semnal/zgomot ( $\Gamma$ ) mari și sub forma



$$P_e = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\gamma} e^{-\gamma} \quad (7.13)$$

Curba  $P_e(\gamma)$  este trasată pentru modulație de fază și detecție coerentă în figura 6.10. Faptul că ea este cea mai coborîtă curbă atestă că semnalizarea cu modulație binară de fază și prelucrare coerentă este optimă din punctul de vedere al transmisiunilor de date.

Dacă referința nu este în fază cu purtătoarea ci există un defazaj  $\Delta\phi$  între ele, semnalul util este  $U_0 \cos \Delta\phi$ . Zgomotul ca putere nu este afectat și deci raportul semnal zgomot scade. Probabilitatea de eroare crește devenind

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma} \cos \Delta\phi) \quad (7.14)$$

Zgomotul aditiv al referinței mai reduce din performanțele detecției coerente.

În cazul detecției diferențiale se va lua în considerare tot cazul binar. Semnalul recepționat și filtrat este

$$s_{nR}(t) = [U_0 a_n g(t-nT) + v(t)] \cos \omega_0 t - w(t) \sin \omega_0 t \quad (7.15)$$

unde  $a_n = \cos \phi_n = \pm 1$ .

Pentru concretizare, fie  $a_n = 1$  și  $a_{n-1} = -1$ . La intrările multiplicatorului se aplică

$$s_{nR}(t) = [U_0 g(t-nT) + v_1(t)] \cos \omega_0 t - w_1(t) \sin \omega_0 t \quad (7.16)$$

$$\Delta s_{n-1R}(t) = [U_0 g(t-nT+T) + v_2(t)] \cos \omega_0 t - w_2(t) \sin \omega_0 t \quad (7.17)$$

După cum se observă analizînd relațiile (7.16) și (7.17), sînt semnalul de detectat cît și referința sînt considerate ca fiind afectate de zgomot. Lățimea de bandă a filtrelor este determinată de  $1/T$  și deci timpul de corelare pentru zgomot este  $\sim T$ . Se pot în consecință considera necorelate zgomotele  $v_1$  și  $v_2$  respectiv  $w_1$  și  $w_2$ ; în orice caz ele au aceeași putere,  $P_z$ .

Cu notațiile:

$$U_0 + v_1(t) = v_1'(t) \quad m\{v_1'(t)\} = U_0$$

$$U_0 + v_2(t) = v_2'(t) \quad m\{v_2'(t)\} = U_0,$$

relațiile (7.16) și (7.17) se pun sub formale:

$$s_{nR}(t) = v_1'(t) \cos \omega_0 t - w_1(t) \sin \omega_0 t = r_1(t) \cos[\omega_0 t + \Theta_1(t)] = \operatorname{Re}\{Z_1(t) e^{j\omega_0 t}\} \quad (7.18)$$

$$r_1(t) = \sqrt{v_1'^2(t) + w_1^2(t)}, \quad \Theta_1(t) = -\operatorname{arctg} \frac{w_1(t)}{v_1'(t)}, \quad Z_1(t) = r_1(t) e^{j\Theta_1(t)} ;$$

$$\begin{aligned} \Delta s_{n-1R}(t) &= v_2'(t) \cos \omega_0 t - w_2(t) \sin \omega_0 t = r_2(t) \cos[\omega_0 t + \theta_2(t)] = \\ &= R \{ z_2(t) e^{j\omega_0 t} \} \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$r_2(t) = \sqrt{v_2'^2(t) + w_2^2(t)}, \quad \theta_2(t) = -\arctg \frac{w_2(t)}{v_2'(t)}, \quad z_2(t) = r_2(t) e^{j\theta_2(t)}$$

După, multiplicarea și înlăturarea componentei de frecvență dublă, prin filtrare trece jos, se obține la ieșirea sistemului semnalul  $s_d(t)$  cu forma (considerînd amplificarea unitară)

$$s_d(t) = \frac{1}{2} r_1(t) r_2(t) \cos[\theta_1(t) - \theta_2(t)] = \frac{1}{2} (v_1' v_2' + w_1 w_2) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ z_1 z_2^* \}. \quad (7.20)$$

S-a presupus că în cele două intervale de lungime  $T$ , consecutive, s-a transmis aceeași informație și deci  $s_d$  la momentul de eşantionare trebuie să fie pozitiv. În consecință, probabilitatea de eroare  $P_e$  se determină din

$$P_e = P \{ v_1' v_2' + w_1 w_2 < 0 \} = P \{ \operatorname{Re} \{ z_1 z_2^* \} < 0 \}. \quad (7.21)$$

Plecînd de la relația

$$\operatorname{Re} \{ z_1 z_2^* \} = \left| \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 - \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right|^2, \quad (7.22)$$

cu notațiile:

$$y_1(t) = \frac{z_1(t) + z_2(t)}{2} \quad (7.23)$$

$$y_2(t) = \frac{z_1(t) - z_2(t)}{2} \quad (7.23')$$

se scrie

$$\operatorname{Re} \{ z_1 z_2^* \} = |y_1|^2 - |y_2|^2. \quad (7.24)$$

Conform relațiilor (7.21) și (7.24), probabilitatea de eroare se exprimă prin

$$P_e = P \{ |y_2| > |y_1| \}, \quad (7.25)$$

relație asemănătoare cu (6.24). Se poate deci, înlocuind  $P_z$  cu  $P_z/2$ , scrie pentru  $\gamma$  mare probabilitatea de eroare sub forma

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\gamma}. \quad (7.26)$$

În figura 6.10 este trasată dependența  $P_e(\gamma)$  și pentru detecția diferențială. Se poate observa că în condiții similare de viteză, un sistem cu MFD trebuie să aibă o putere de emisie cu 3 dB mai mare decît un sistem DMPD, la aceeași probabilitate de eroare.

În cazul detectoarelor diferențiale, referința pentru recepționarea unui simbol este dată de semnalul corespunzător simbolului anterior recepționat. Prin urmare, fiecare simbol intervine de două ori în procesul de decizie, odată ca semnal de demodulat și odată ca referință a demodulatorului. Admițând că perturbațiile ce afectează două simboluri succesive sînt necorelate, este evident că există tendința de grupare a cîte două erori.

Se arată [41] că probabilitatea apariției a două erori consecutive este

$$P_{(e_1, e_2)} = \frac{1}{4\pi} e^{-T} \int_0^{\pi} [1 - \operatorname{erfc}(\sqrt{T} \cos \theta)] \cdot$$

$$\cdot \left\{ 1 + \sqrt{\pi T} \cos \theta e^{-\cos^2 \theta} [1 + \operatorname{erfc}(\sqrt{T} \cos \theta)] \right\} d\theta. \quad (7.27)$$

Probabilitatea apariției erorii  $e_2$ , condiționată de eroarea  $e_1$ ,  $P_{(e_2/e_1)}$ , în funcție de raportul semnal zgomot, este prezentată în figura 7.10. Dacă  $P_{e_1} = P_{e_2} = 0,5 e^{-T}$ , conform relației

(7.26), se poate scrie pentru  $P_{(e_2/e_1)}$  expresia

$$P_{(e_2/e_1)} = 2 e^T P_{(e_1, e_2)}. \quad (7.28)$$

Atunci cînd raportul semnal zgomot crește, numărul erorilor duble poate fi neglijat în raport cu erorile simple.

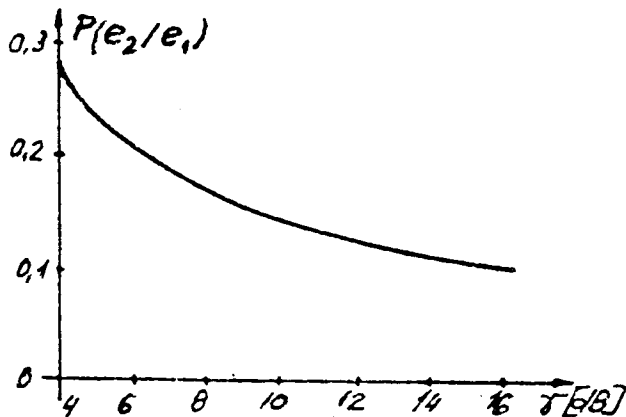


Fig.7.10.

Deoarece sistemele cu modulație de fază cu 4 faze distincte ocupă aceeași ban-

dă ca și sistemele cu modulație de fază cu 2 faze (la aceeași viteză de semnalizare) dar transportă de două ori mai multă informație, se va analiza și detectorul diferențial corespunzător (figura 7.6). Decizia privind perechea de simboluri transmise se ia conform semnelor  $s_A$  și  $s_B$ . După cum se vede, un detector pentru un sistem cu 4 faze poate fi considerat ca fiind format din două detectoare diferențiale binare.

Semnalele provenite din semnalul recepționat anterior și aplicate celor două multiplicatoare sînt considerate a fi

$$\Delta s_{n-1R}^A(t) = [U_0 \cos 45^\circ + v_1(t)] \cos \omega_0 t + [U_0 \sin 45^\circ - w_1(t)] \sin \omega_0 t; \quad \Phi_{n-1} = 0 \quad (7.29)$$

respectiv

$$\Delta s_{n-1}^A(t) = [U_0 \cos(-45^\circ) + v_2(t)] \cos \omega_0 t + [U_0 \sin(-45^\circ) - w_2(t)] \sin \omega_0 t \quad (7.30)$$

Semnalul recepționat și aplicat ambelor multiplicatoare are faza  $\phi_n$  și deci .

$$s_{nR}(t) = [U_0 \cos \phi_n + v_3(t)] \cos \omega_0 t + [U_0 \sin \phi_n - w_3(t)] \sin \omega_0 t. \quad (7.31)$$

Relațiile (7.29), (7.30) și (7.31) se scriu, ca și în cazul detectorului binar, sub formele:

$$\Delta s_{n-1R}^A(t) = v_1'(t) \cos \omega_0 t + w_1'(t) \sin \omega_0 t = r_1(t) \cos[\omega_0 t + \theta_1(t)] = \operatorname{Re}\{Z_1(t) e^{j\omega_0 t}\} \quad (7.32)$$

$$\Delta s_{n-1R}^B(t) = v_2'(t) \cos \omega_0 t + w_2'(t) \sin \omega_0 t = r_2(t) \cos[\omega_0 t + \theta_2(t)] = \operatorname{Re}\{Z_2(t) e^{j\omega_0 t}\} \quad (7.33)$$

$$\Delta s_{nR}(t) = v_3'(t) \cos \omega_0 t + w_3'(t) \sin \omega_0 t = r_3(t) \cos[\omega_0 t + \theta_3(t)] = \operatorname{Re}\{Z_3(t) e^{j\omega_0 t}\} \quad (7.34)$$

pentru care :

$$m\{v_1'(t)\} = m\{w_1'(t)\} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \operatorname{Re}\{Z_1(t)\} = \operatorname{Im}\{Z_1(t)\}$$

$$m\{v_2'(t)\} = m\{w_2'(t)\} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = \operatorname{Re}\{Z_2(t)\} = \operatorname{Im}\{Z_2(t)\}$$

$$m\{v_3'(t)\} = U_0 \cos \phi_n = \operatorname{Re}\{Z_3(t)\}$$

$$m\{w_3'(t)\} = U_0 \sin \phi_n = \operatorname{Im}\{Z_3(t)\}$$

$$m\{[Z_k(t) - m\{Z_k(t)\}]^2\} = 2P_z \quad k=1,2,3.$$

Prin multiplicare și filtrare trece jos, se obțin semnalele  $s_A(t)$  și  $s_B(t)$  cu expresiile :

$$s_A(t) = \frac{1}{2} r_1(t) r_3(t) \cos[\theta_1(t) - \theta_3(t)] = \frac{1}{2} (v_1' v_3' + w_1' w_3') = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{Z_1 Z_3^*\} \quad (7.35)$$

$$s_B(t) = \frac{1}{2} r_2(t) r_3(t) \cos[\theta_2(t) - \theta_3(t)] = \frac{1}{2} (v_2' v_3' + w_2' w_3') = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{Z_2 Z_3^*\}. \quad (7.36)$$

Erora apare atunci când fie canalul A, fie canalul B, fie amândouă iau decizii false asupra semnelui recepționatului prelevat din  $s_A$  respectiv  $s_B$ . Probabilitatea de apariție a erorii  $P_e$  este de independentă de  $P(A)$  și  $P(B)$ , probabilitățile de eroare în canalele A și B

$$P_e = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB), \quad (7.37)$$

unde A și B semnifică evenimentul apariției erorii în canalul A

respectiv B. Aceste două evenimente nu sînt independente, deoarece semnalele prelucrate pe cele două canale sînt dependente, și deci  $P(AB) \neq 0$ .

Relația (7.37) se poate transforma într-o inegalitate  
 $P_e < P(A) + P(B)$ . (7.38)

Tinînd seama de faptul că distanța între doi fazori este  $2U_0$  în sistemele binare și numai  $\sqrt{2} U_0$  în sistemele cu 4 faze, raportul semnal/zgomot  $\gamma$  din relația (7.26) se multiplică cu factorul  $(1 - 1/\sqrt{2})$ . Cum  $P(A) = P(B)$ , rezultă

$$P_e < e^{-\gamma(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})} \quad (7.39)$$

Dacă faza poate lua mai multe valori, banda ocupată rămîne aceeași, crescînd însă cantitatea de informație transmisă în intervalul elementar T. În schimb, pentru a menține aceeași probabilitate de ercare, odacă cu creșterea numărului de faze utilizate în semnalizare, trebuie crescută puterea semnalului emis (trebuie crescut raportul semnal/zgomot,  $\gamma$ ).