Turbo codes (convolutifs)

Timisoara

15-17 mars 2004

Catherine Douillard,

Claude Berrou et Michel Jézéquel, ENST Bretagne

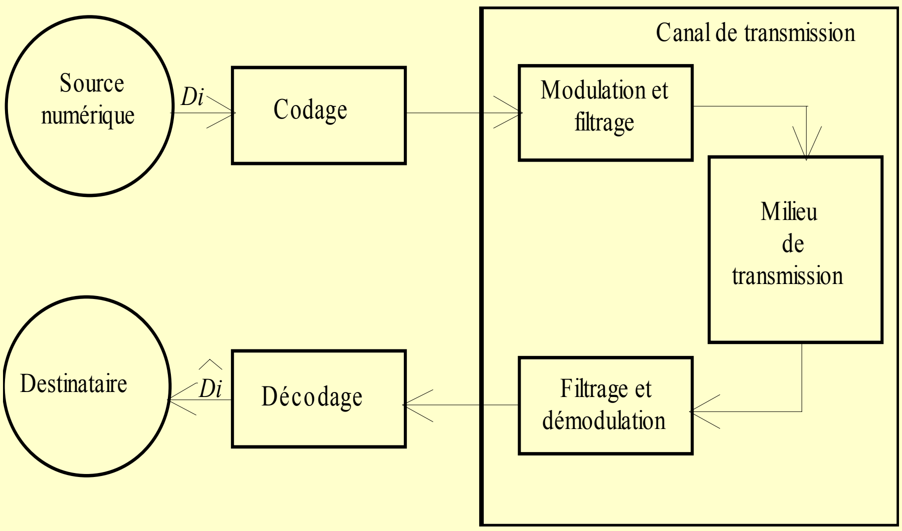
Catherine.Douillard@enst-bretagne.fr

Plan

Chapitre 1

Les codes correcteurs d'erreurs

Une chaîne de transmission



Codes correcteur d'erreurs — Généralités

Différentes familles de codage

Codage de source : réduire le débit d'information
Codage de canal : ajouter de la redondance
Sécurité, cryptographie
Authentification, *watermarking*
CDMA
...

Codes correcteur d'erreurs — Généralités

Séquence d'information à transmettre : $[d_1\ d_2\ \ldots\ d_i\ \ldots\ d_k]$

Addition d'une redondance linéaire : $[r_1\ r_2\ \ldots\ r_j\ \ldots\ r_{n-k}]$
(le code est dit systématique)

$$r_j = \sum_{i=1\ldots k} p_{i,j} d_i \quad \mod 2 \qquad (p_{i,j} = 0 \text{ ou } 1)$$

Forme matricielle

$$[r_1\ r_2\ \ldots\ r_j\ \ldots\ r_{n-k}] = [d_1\ d_2\ \ldots\ d_i\ \ldots\ d_k] \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n-k} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k,1} & \cdots & p_{k,n-k} \end{pmatrix}$$

Codes correcteur d'erreurs — Généralités

$[d_1\ d_2\ \ldots\ d_i\ \ldots\ d_k][r_1\ r_2\ \ldots\ r_j\ \ldots\ r_{n\text{-}k}]$: mot de code

Rendement de codage : $R = k/n$

Code $(n\ , k\ , d_{\min})$
de distance minimale $d_{\min}$

Le code étant linéaire, la séquence « *tout zéro* »
peut être prise comme référence

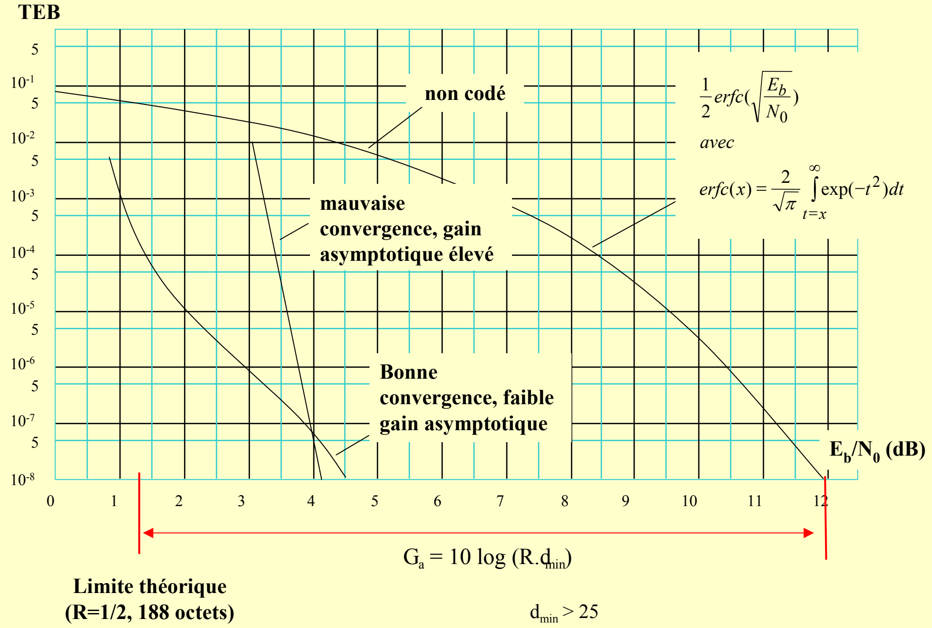
La distance d_{min} est le nombre minimum de « 1 »
des mots de code $[d_1\ d_2\ \ldots\ d_i\ \ldots\ d_k]\ [r_1\ r_2\ \ldots\ r_j\ \ldots\ r_{n\text{-}k}]$
si $[d_1\ d_2\ \ldots\ d_i\ \ldots\ d_k] \neq$ « *tout zéro* »

Codes correcteur d'erreurs — Généralités

Un bon code est un code avec une grande distance d_{min}
mais ce n'est pas tout :
- il doit pouvoir être décodé !
  (contre-exemple : les codes aléatoires)
- il doit exister un décodeur permettant d'utiliser
  la capacité de correction du code

Exemple :

MDP4, canal gaussien, taux d'erreurs cible : 10^{-8}



Codes correcteur d'erreurs — Généralités

distinction traditionnelle mais inappropriée entre

Les codes en « bloc » : Hamming, Golay, BCH, Reed-Solomon, ...

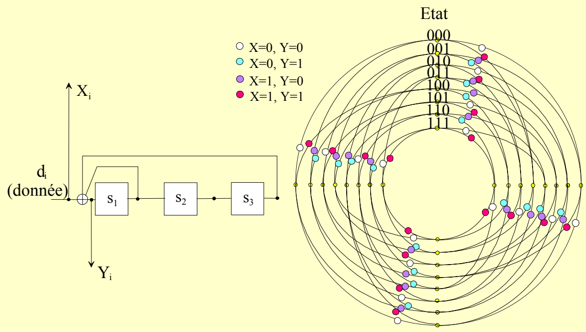
Les codes « convolutifs »

Une distinction plus naturelle prendrait en compte l'algorithme de décodage, en particulier :
- hard – dur (algébrique)
- soft – souple (probabiliste)

Exemple :

Codes correcteur d'erreurs — Généralités

Comment transformer un code de Hamming parfait (8,4,4)



d_i	Hamming étendu	$\mathbf{Y_i}$	d_i	Hamming étendu	$\mathbf{Y_i}$
0000	0000	**0000**	1111	1111	**1111**
0001	0111	**1011**	1110	1000	**0100**
0010	1101	**0111**	1101	0010	**1000**
0011	1010	**1100**	1100	0101	**0011**
0100	1110	**1110**	1011	0001	**0001**
0101	1001	**0101**	1010	0110	**1010**
0110	0011	**1001**	1001	1100	**0110**
0111	0100	**0010**	1000	1011	**1101**

(autre exemple : le code de Golay étendu (24, 12, 8) peut être représenté par un treillis circulaire 16 états)

Codes correcteur d'erreurs — Généralités

Code aléatoire (Shannon)

Information	Redondance
1 .... i ... k	1 .... j ... n- k
10000000 ... 00000000000000	0010010111...0110000100
01000000 ... 00000000000000	1001110100...0011101001
00100000 ... 00000000000000	1111010001...0001111011
....	
00000000 ... 00000000000001	1010101110...1010111101
Σ	
10010110 ... 10001100010101	0011101011...1110010100

$d_{min} \approx (n-k)/4 = k.(1-R)/4R$ où $R = k/n$

Codes correcteur d'erreurs — Généralités

$d_{min} \approx (n-k)/4 = k.(1-R)/4R$ où $R = k/n$

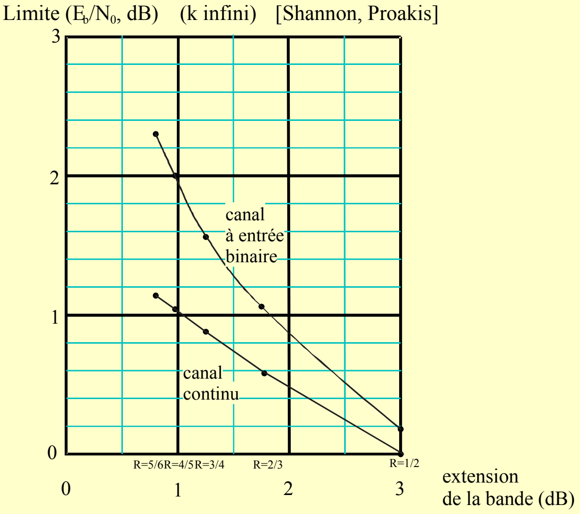
Exemple : k = 1504 (MPEG), R = 1/2
$\Longrightarrow$ $d_{min} \approx 375$!!

(un code convolutif 64 états
a une distance d_{min} = 10 pour R = 1/2 !!)

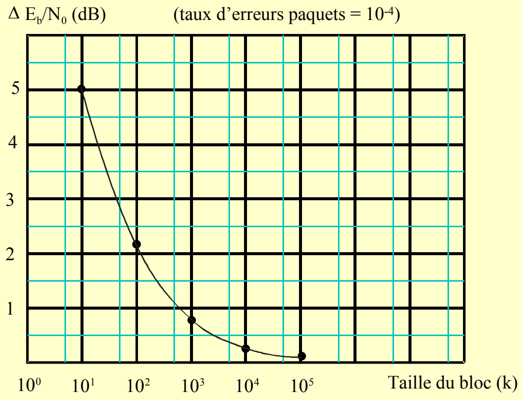
Mais non décodable en pratique ...

Codes correcteur d'erreurs — Généralités

(sur la base d'un code aléatoire)



Codes correcteur d'erreurs Généralités



Correction à prendre en compte pour des bocks de taille *k* :
[S. Dolinar, D. Divsalar and F. Pollara, "Code performance as a function of block size", TMO progress report 42-133, JPL, NASA].

Calcul des limites

Un outil de calcul des limites théoriques a été développé par un étudiant en thèse il est disponible à l'adresse :

http://www-elec.enst-bretagne.fr/turbo/

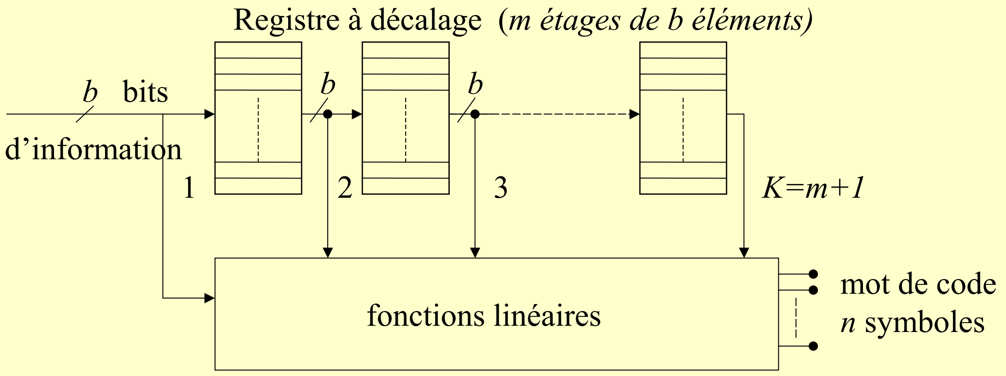
Chapitre 2

Codes convolutifs

Plan

- Codes convolutifs classiques
  - Représentations
  - Propriétés
- Codes convolutifs systématiques
- Codes convolutifs récursifs systématiques
- Rendement de codage et poinçonnage
- Fermeture de treillis

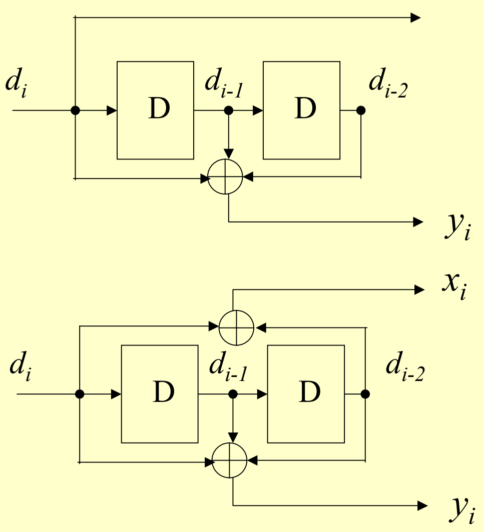
Codes convolutifs



K= longueur de contrainte

R=b/n (rendement de codage)

Code convolutif classique



Elias, 1954

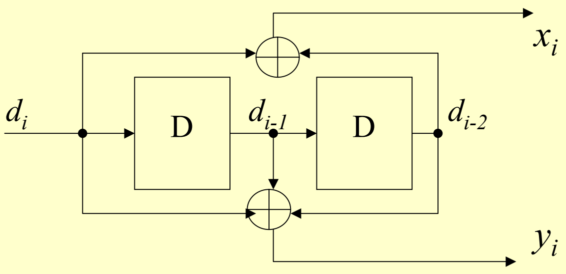
Mémoire du code : $\nu = 2$

Longueur de contrainte :
$K = \nu + 1 = 3$

$R = 1/2$

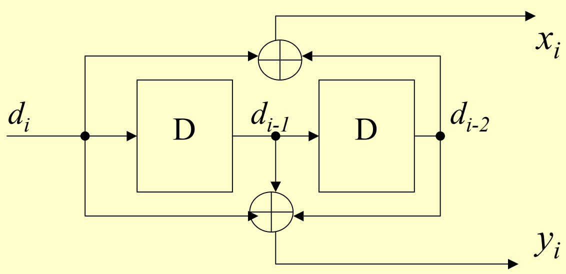
Forney, 1970

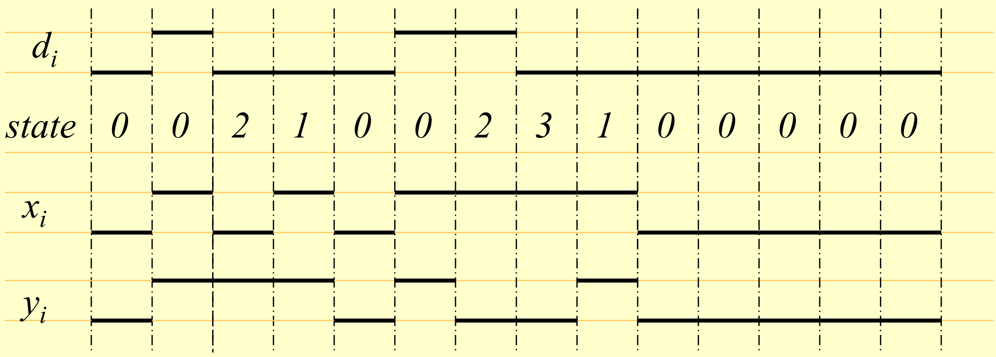
Exemple



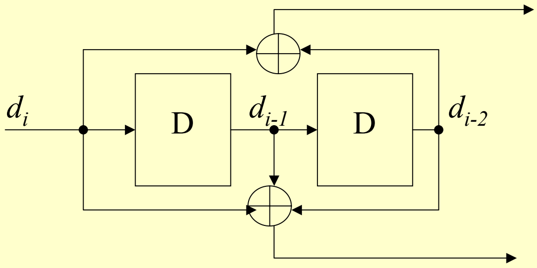
- K=3
- b=1
- n=2
- R=b/n=1/2

Exemple





Générateurs



$$x_i = \sum_{j=0}^{2} g_j^1 d_{i-j}$$

$$y_i = \sum_{j=0}^{2} g_j^2 d_{i-j}$$

$$g^1 = \left[g_0^1, g_1^1, g_2^1\right] = \left[1,0,1\right] \longrightarrow G^1(D) = g_0^1 + g_1^1 D + g_2^1 D^2$$

$$g^2 = \left[g_0^2, g_1^2, g_2^2\right] = \left[1,1,1\right] \longrightarrow G^2(D) = g_0^2 + g_1^2 D + g_2^2 D^2$$

Générateurs sous la forme octale : (5,7)

Représentation des codes convolutifs

Trois formes :

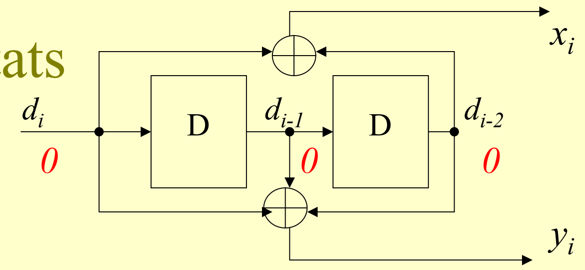
- arbre
- machine d'état
- treillis

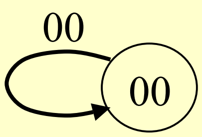
Machine d’états

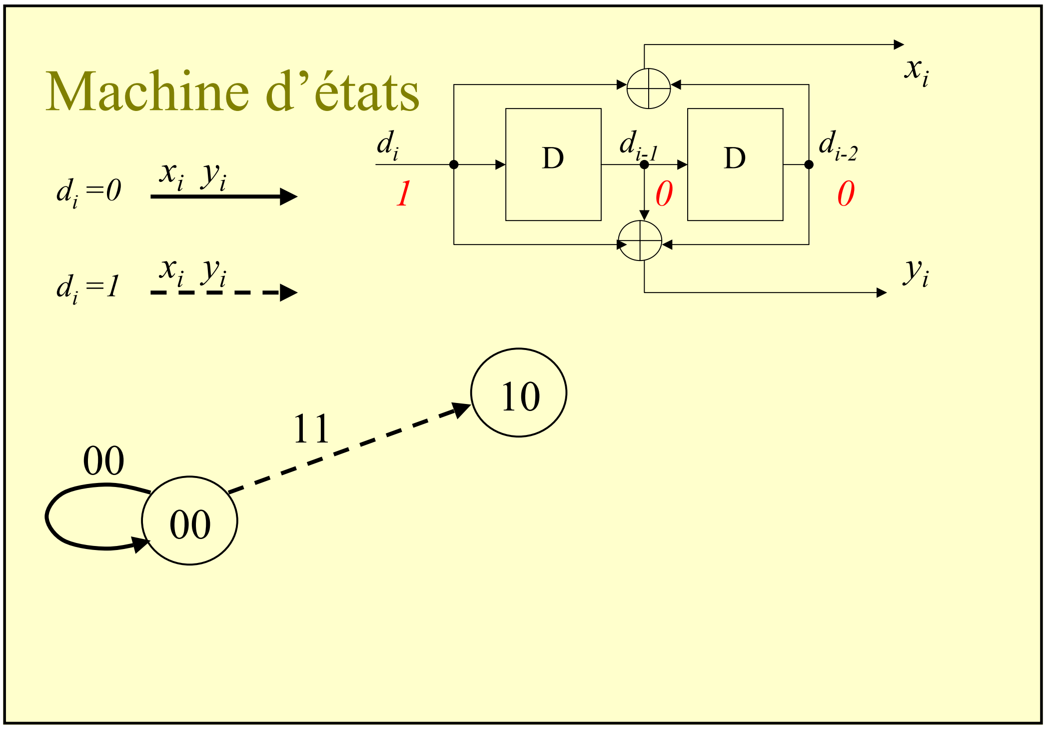
Machine d’états

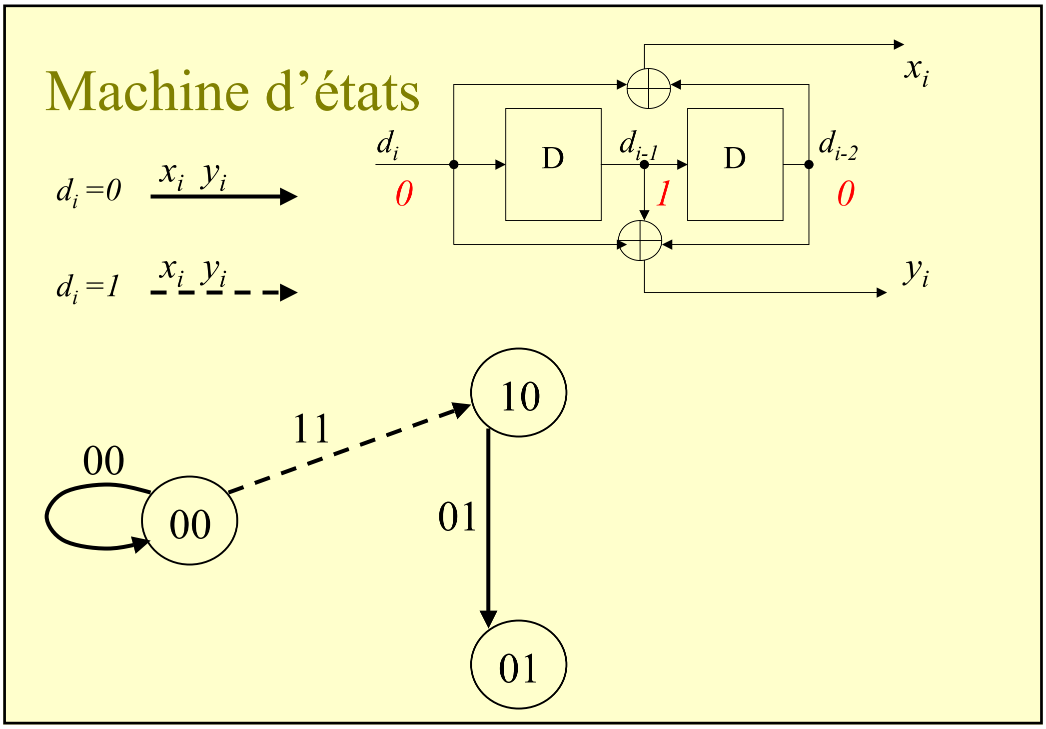
$d_i=0$ $\xrightarrow{x_i\ y_i}$

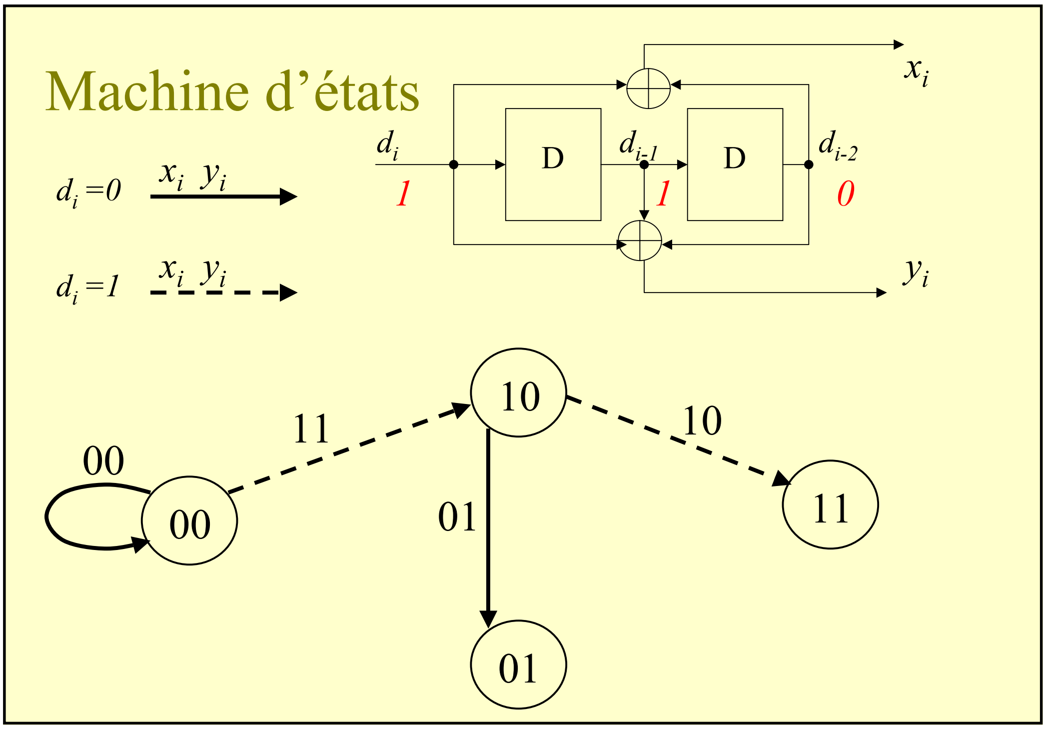
$d_i=1$ $\overset{x_i\ y_i}{\dashrightarrow}$

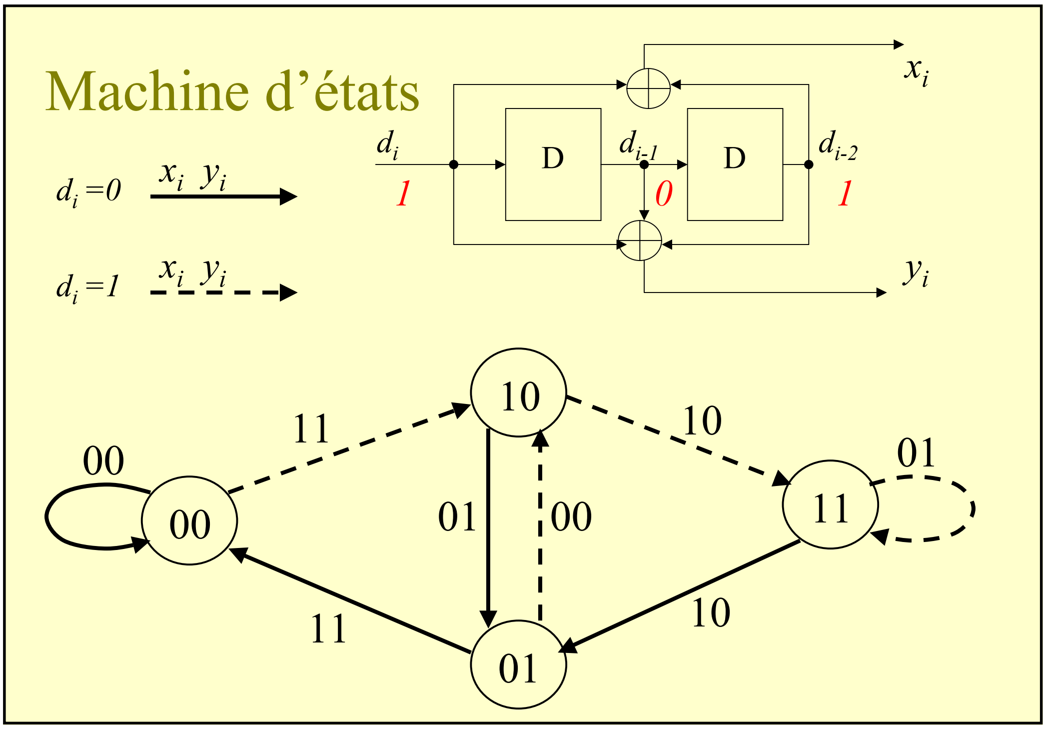





Machine d'états
$d_i=0$ $x_i\ y_i$
$d_i=1$ $x_i\ y_i$
d_i
d_{i-1}
d_{i-2}
D
D
1
0
0
x_i
y_i
00
11
00
10

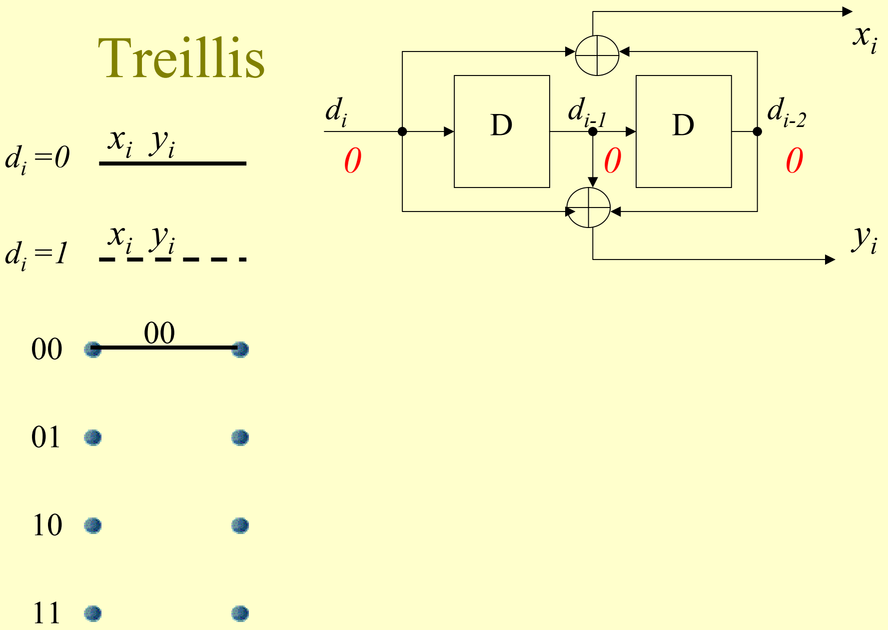

Machine d'états
$d_i=0$ $x_i\ y_i$
$d_i=1$ $x_i\ y_i$
d_i
d_{i-1}
d_{i-2}
D
D
0
1
0
x_i
y_i
00
11
00
10
01
01

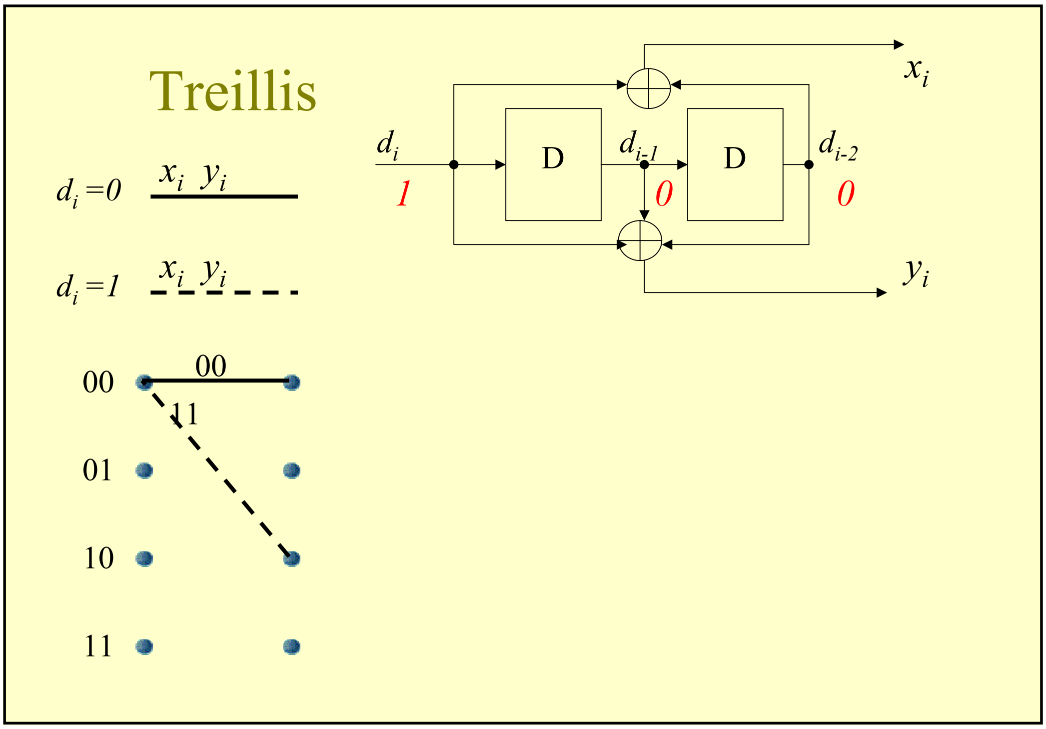

Machine d'états
$d_i = 0$ x_i y_i
$d_i = 1$ x_i y_i
x_i
d_i
D
d_{i-1}
D
d_{i-2}
1
1
0
y_i
00
11
10
10
00
01
11
01

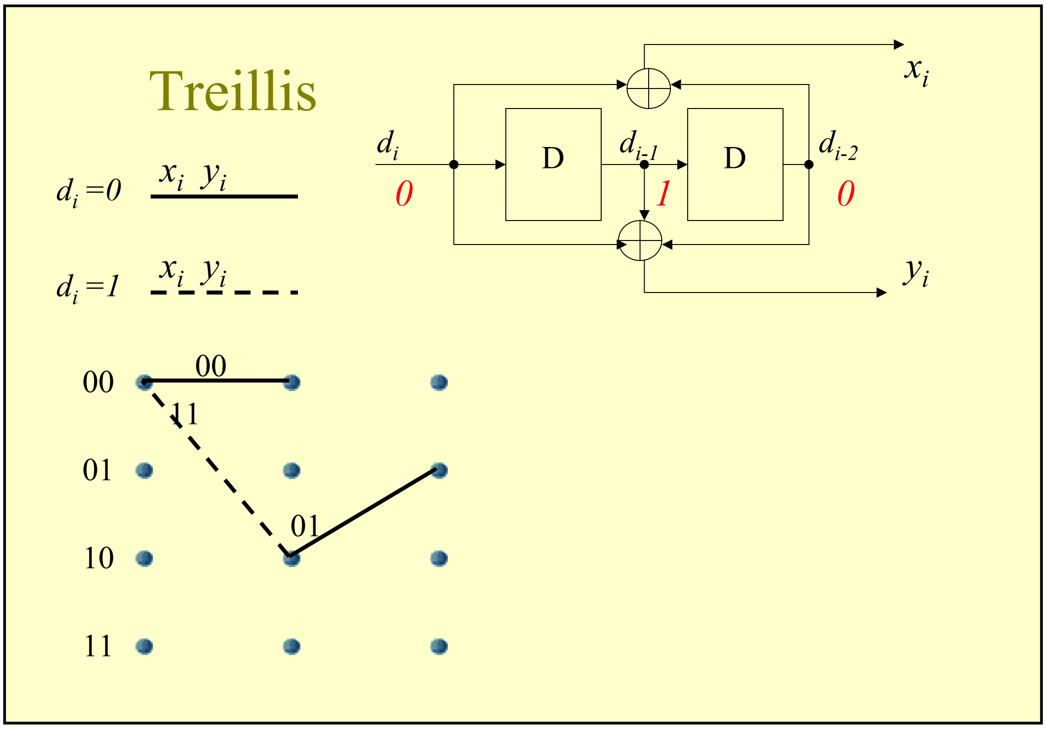

Machine d'états
$d_i = 0$ x_i y_i
$d_i = 1$ x_i y_i
x_i
d_i
D
d_{i-1}
D
d_{i-2}
1
0
1
y_i
00
11
10
10
01
00
01
00
11
11
10
01

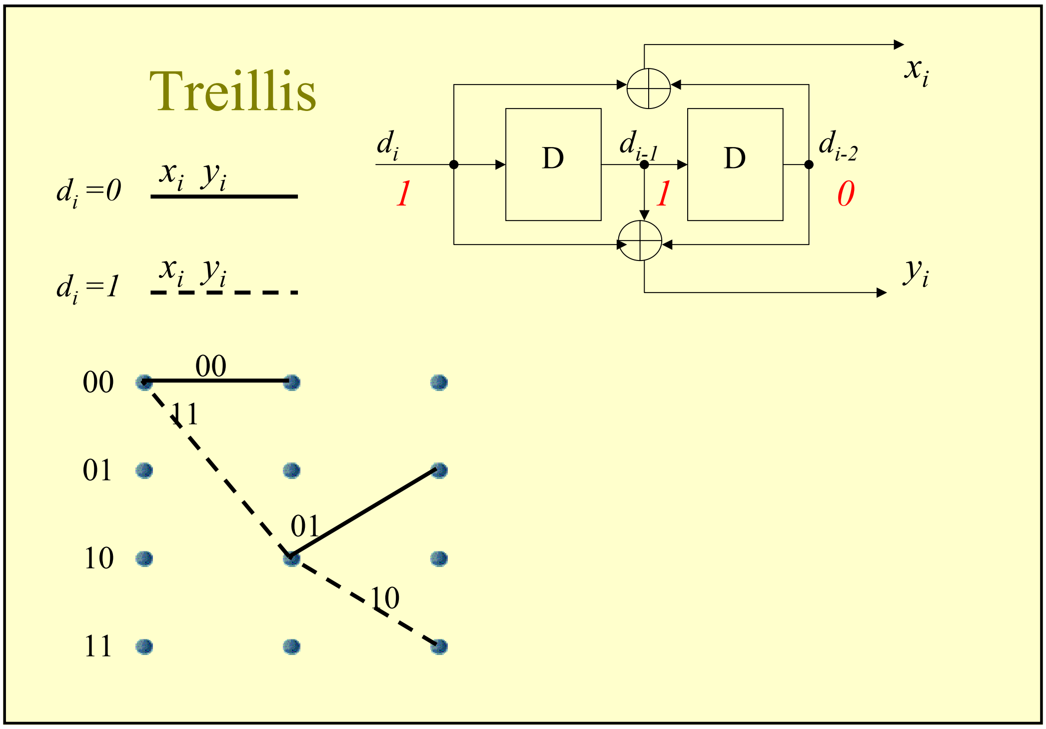
Treillis

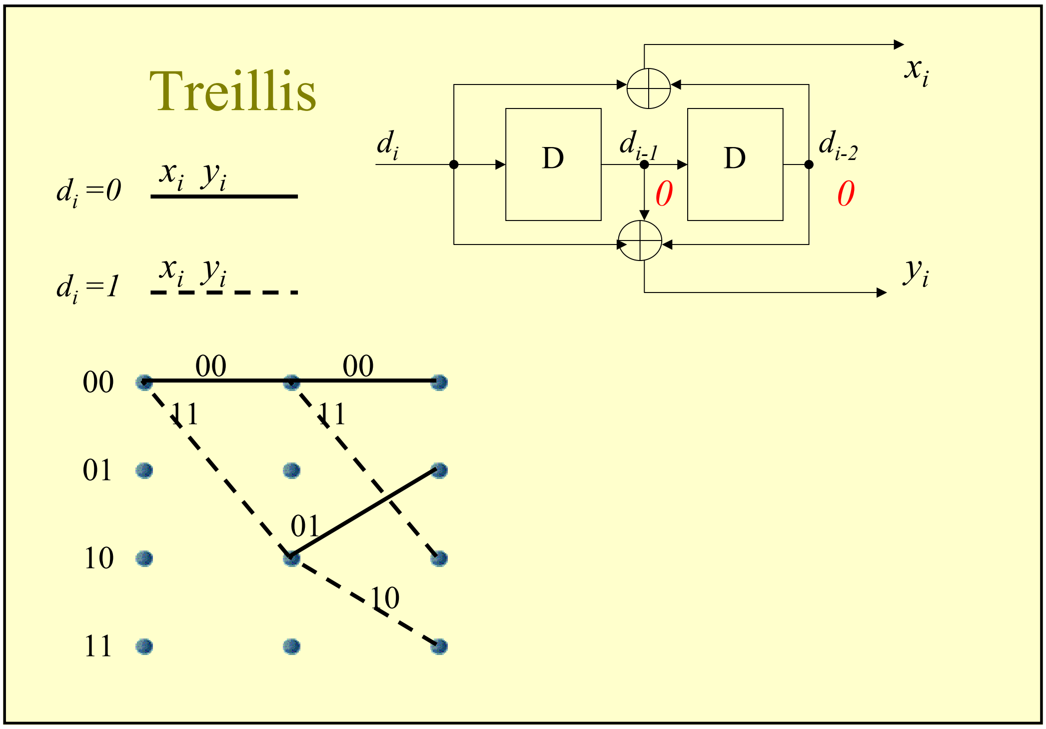
Treillis



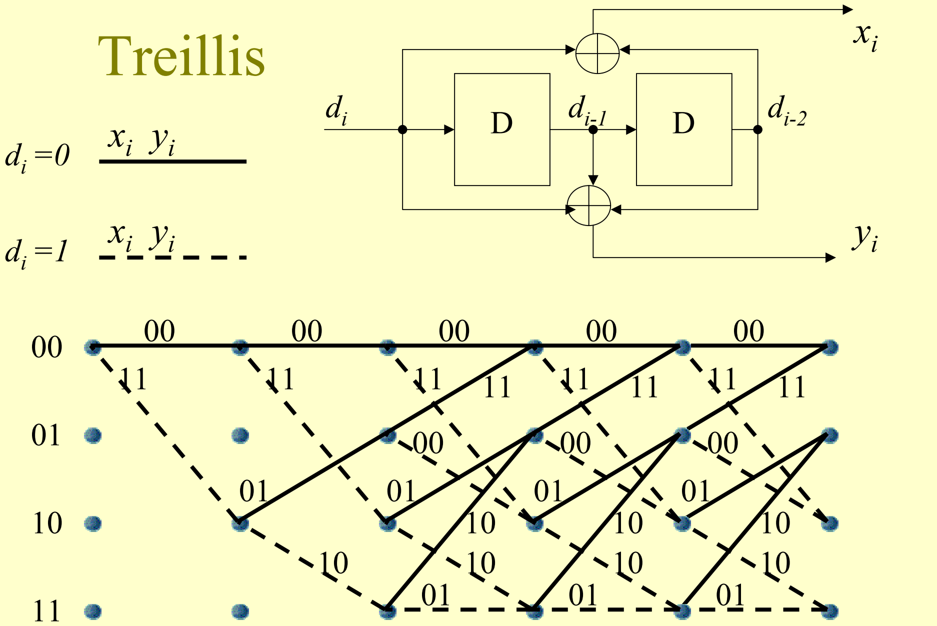

Treillis
d_i =0
x_i y_i
d_i =1
x_i y_i
00
01
10
11
00
11
d_i
d_i-1
d_i-2
D
D
1
0
0
x_i
y_i


Treillis
d_i =0
x_i y_i
d_i =1
x_i y_i
00
01
10
11
00
11
01
d_i
d_i-1
d_i-2
D
D
0
1
0
x_i
y_i

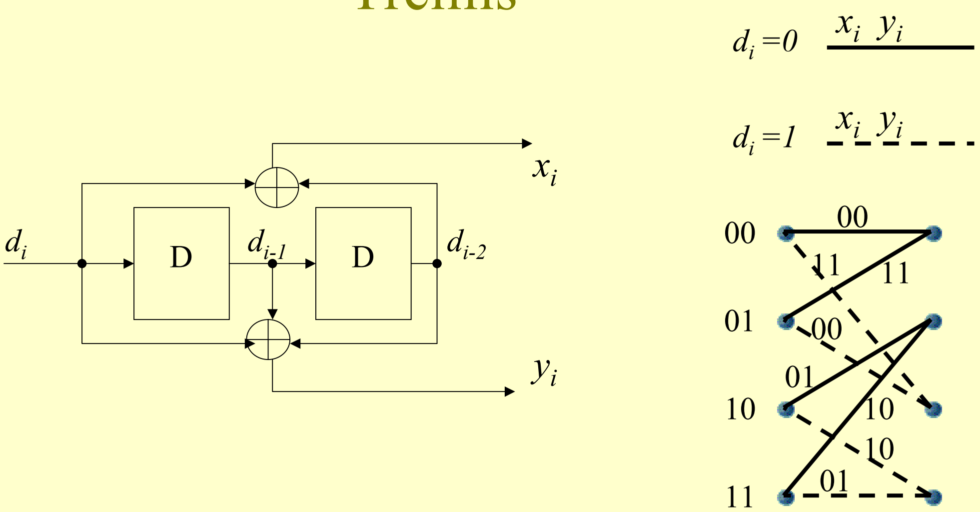

Treillis
d_i =0
x_i y_i
d_i =1
x_i y_i
d_i
D
d_i-1
D
d_i-2
1
1
0
x_i
y_i
00
01
10
11
00
11
01
10


Treillis
d_i =0
x_i y_i
d_i =1
x_i y_i
d_i
D
d_i-1
D
d_i-2
0
0
x_i
y_i
00
01
10
11
00
00
11
11
01
10

Treillis

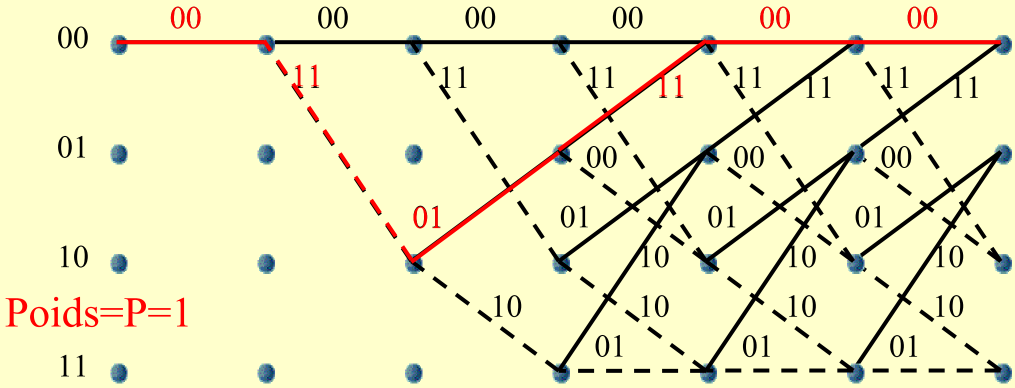


Treillis



Distance

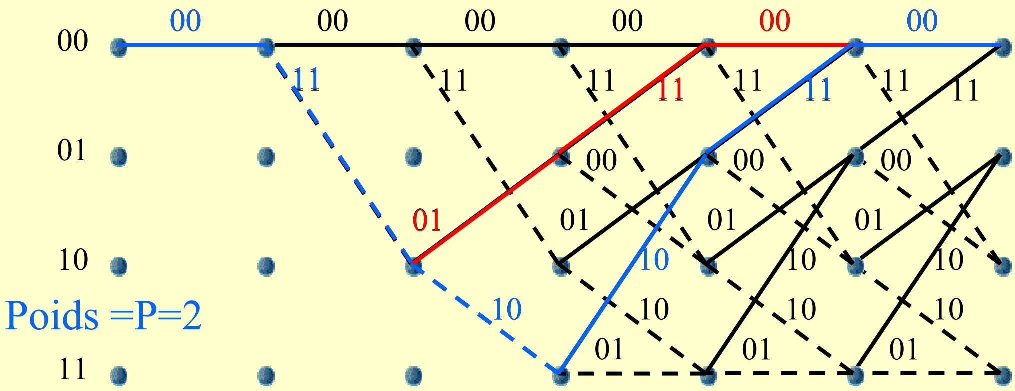
(*K*=3) (5,7) -> distance libre = d_{libre}=5



Distance de Hamming 0 + 2 + 1 + 2 + 0 + 0 =5

Distance

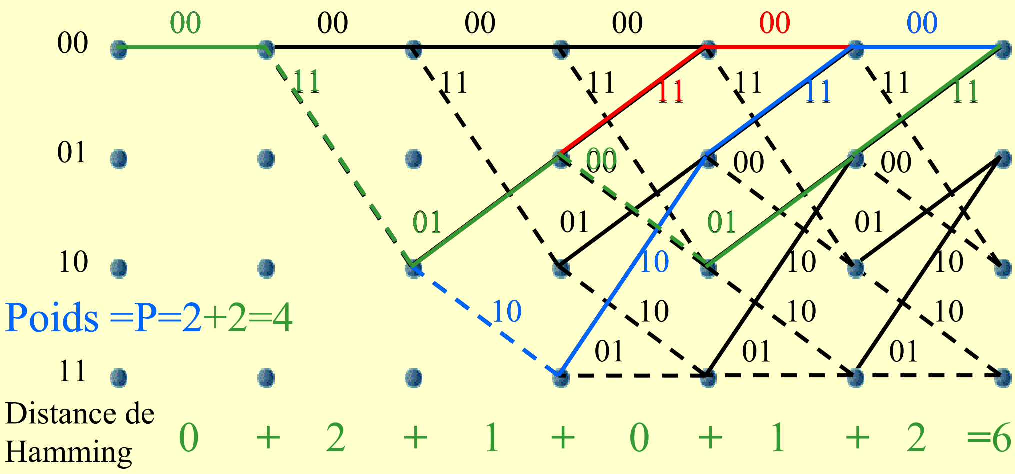
(*K*=3) (5,7) -> distance libre = d_{libre}=5



Distance de Hamming 0 + 2 + 1 + 1 + 2 + 0 =6

Distance

(K=3) (5,7) -> distance libre = d_{libre}=5



Distance

- Longueur de contrainte : K = 3
- Générateurs (5,7)
  - Distance libre minimale = 5
  - Spectre des distances:
    - Distance = 5 (1 cas), P=1
    - Distance = 6 (2 cas), P=4
    - Distance = 7 (4 cas), P=12
    - ….